Feuille Cours_6_2 : applications linéaires en dimension finie.

Ex 1 : 1) a. Justifier qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ telle que :
$$f((1,1)) = (1,1) \text{ et } f((0,1)) = (3,3).$$
b. Déterminer l'image d'un vecteur $u = (x, y)$ quelconque de $\mathbb{R}^2$ par f.

2) a. Justifier qu'il existe un unique application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que :
$$f(1) = (0,0,0,0),\ f(X) = (1,1,0,0) \text{ et } f(X^2) = (0,0,1,1).$$
b. Déterminer l'image du polynôme $(X+1)^2$ par f.

Ex 2 : 1) Déterminer une base de l'image des applications linaires suivantes :

$$f \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+z, 3x+y+z, x+y) \end{array} \qquad f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array} \qquad f: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M - M^T \end{array}$$

2) Les applications linéaires précédentes sont-elles bijectives ?

Ex 3 : Les applications linéaires suivantes sont-elles des isomorphismes :

$$f_1 \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (z,y,x) \end{array} \qquad f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto & XP'(X) \end{array} \qquad f_3: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1)) \end{array}$$

$$f_4 \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+z, 3x+y+z, x+y) \end{array} \qquad f_5: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(1), P(2), P(3)) \end{array}$$

$$f_6 \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \qquad f_7: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \longmapsto & a+bX+cX^2 \end{array} \qquad f_8: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$$

Ex 4 : Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dim(E) = n$ et f une application linéaire de E dans F.
On appelle rang de f la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, on note $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$
Le but de cette partie est de montrer l'égalité :
$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = n \qquad (*)$$
On note p la dimension de $\ker(f)$

1) Justifier que : $0 \leqslant p \leqslant n$.
2) Démontrer $(*)$ lorsque $p = 0$ et lorsque $p = n$.

Dans la suite on suppose $p \in [\![1; n-1]\!]$ et on considère $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker(f)$,
on complète $(e_1, \dots, e_p)$ par les vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$ de sorte que : $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

3) Montrer que : $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \cap \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) = \{0_E\}$
4) Montrer que la famille $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est une famille libre.
5) Montrer que la famille $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
6) Conclure.

Ex 5 : *Avant de faire ces questions on admettra le théorème démontré à la question **Ex 4**.*

1) Calculer le rang des applications linéaires f suivantes. *(On ne justifiera pas qu'elles sont linéaires)*
   a. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f((x,y,z)) = (x+y-z\ ,\ -x-y+z\ ,\ 2x+2y-2z)$.
   b. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $f(P) = P'$.
   c. On note f l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(P) = (P(0), P(1))$

2) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ définie par $f((x,y,z)) = (x+y\ ,\ y+z\ ,\ x+z\ ,\ x+y+z)$.
   a. Déterminer le rang de f.
   b. En déduire que f est injective.

3) On note $E = \mathbb{R}_6[X]$ et f la forme linéaire $P(X) \longmapsto P(1)$
   a. Quel est le rang de f ?
   b. En déduire la dimension de $\ker(f)$.
   c. Déterminer une base de $\ker(f)$.

4) On note A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par $f(X) = AX$.
   a. Déterminer le rang de f.
   b. En déduire une base de $\ker(f)$.

Ex 6 : Les applications linéaires suivantes sont-elles injectives ?, surjectives ?, bijectives ?

1) $f \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$

2) $f \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, -x-y, 2x+2y) \end{array}$

3) $f \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+2z, -x-y+3z, 2x+2y+4z, x+y+z) \end{array}$

4) $f \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y+2z+t, -x-y+3z, 2x+2y+4z-t) \end{array}$

5) $f \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+2z, -x-y+3z) \end{array}$

6) $f \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+2z \end{array}$

7) $f \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+2y+z, 2x+4y-z+t, x+2y+z) \end{array}$

8) $f \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(2), P'(2), P''(2)) \end{array}$

9) $f \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$

10) $\Phi \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X) \end{array}$

– –

Ex 4 Indications.

(Ici on n'utilise que des résultats déjà vus en cours)

1) Ne pas chercher un argument compliqué, c'est simple si on comprend la question.

2) Pour $p = 0$, on vient de voir dans le cours que si f est injective alors $f(\mathscr{B})$ est libre.
   Pour $p = n$, Si $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors $\mathrm{rg}(f) = 0$.

3) Il suffit de prendre un vecteur dans l'intersection et de montrer que le vecteur est nul en utilisant que $(e_1, ...e_n)$ est libre.

4) On commence par la rédaction classique pour montrer qu'on a une famille libre,
   puis on utilise la linéarité de f et finalement le résultat de la question 3).

5) On utilise la proposition donnant $\mathrm{Im}(f)$ avec un Vect, puis on utilise que les $e_1, ..., e_p$ sont dans $\mathrm{Ker}(f)$.

6) Il suffit de déterminer en fonction de n et p la dimension des différents espace-vectoriels.