Colles de mathématiques - Semaine 10 - du 08/12/25

La colle commencera par une questions de cours, les démonstrations peuvent être données en exercice.

- **Variables aléatoires réelles discrètes.**

  Proposition : $V(aX+b) = a^2\,V(X)$. Formule de Kœnig-Huygens. *(Attention aux conditions d'utilisation)*

  Si X et Y sont indépendantes, espérance de XY et variance de $X+Y$.

  Généralisation n VAR discrètes indépendantes ou à une suite de VAR discrète.

  Lois usuelles avec $X(\Omega)$ fini : Variable certaine, loi de Bernoulli, uniforme, binomiale. *(Pas hypergéométrique)*

  Lois usuelles avec $X(\Omega)$ dénombrable : Loi géométrique, loi de Poisson.

  Situations types (*pour la binomiale et la géométrique*). (*bien distinguer la définition et les situations types !!*)

  Connaître l'espérance et la variance de ces lois. (*sauf la variance de l'uniforme*)

  Invariance temporelle des lois géométriques. *(démonstration à connaître)*

  Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. ($n \geqslant 30$ et $p \leqslant 0{,}1$)

  Nous n'avons pas encore vu les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

- **Maximum, minimum et somme de variables aléatoires discrètes.**

  Loi du maximum ou du minimum de deux variables aléatoires indépendantes.

  Loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes *(VAR à valeurs dans $\mathbb{N}$).*
  Loi de la somme de deux VAR discrètes indépendantes suivant des lois de Poisson.
  (Stabilité des lois de Poisson).

  Généralisation au cas de n variables aléatoires suivant une loi de Poisson.

  Lois de la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.

  Nous n'avons pas encore vu le cours sur les couples de variables aléatoires.

- **Applications linéaires.**

  Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme. Espaces isomorphes.

  Notation $\mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{L}(E)$. Notation f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

  Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque.

  Propriétés de ces opérations.

  Noyau. Lien avec l'injectivité. Image. Lien avec la surjectivité.

  On montre que le noyau et l'image sont des sous-espaces vectoriels, respectivement de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée.

- **En dimension finie.**

  Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.

  Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.

  Pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

  Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.

  Pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité. *(Contre-exemple en dimension infinie)*

  Rang d'une application linéaire. Théorème du rang.

  Pas encore de matrice d'application linéaire.

- **Python.**

  Simulation des tirages successifs dans des urnes.
  Simulation d'une loi discrète fini quelconque.
  Récupération du nombre d'occurences des valeurs prises par une VAR discrètes au cours de simulations.
  Estimation de l'espérance et de la loi d'une VAR discrète par des séries de simulations.