Correction de la feuille_Exo_10 : Applications linéaires

Ex 1 : • ***Ce que nous a fait en classe.***

f est un automorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.

de plus

une famille de 3 vecteurs d'un espace de dimension 3 est une base si et seulement si elle est libre.

donc il suffit de montrer que $(f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_E = 0_E &\iff \lambda_1(e_2+e_3) + \lambda_2(e_1+e_3) + \lambda_3(e_1+e_2) = 0_E \\
&\iff (\lambda_2+\lambda_3)e_1 + (\lambda_1+\lambda_3)e_2 + (\lambda_1+\lambda_2)e_3 = 0_E \\
&\iff \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
&\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{aligned}$$

donc $(f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ est libre et ainsi

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E}$$

Avec les matrices, la rédaction est peut-être plus simple.

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

f est un automorphisme si, et seulement si, la matrice M est inversible

et comme $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

M est inversible si, et seulement si, le rang de M est égal à 3.

donc il suffit de calculer le rang de M,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= 3
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E}$$

Ex 2 : *(non corrigé)*
Ex 3 : *(non corrigé)*

– –

Ex 4 : *(non corrigé)* c'est un cas particulier de l'**Ex 5**

Ex 5 : 1) • φ est une application de E dans E.
• Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in E^2$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\alpha P + \beta Q) & = & (\alpha P + \beta Q)' + 3(\alpha P + \beta Q) \\ & = & \alpha P' + \beta Q' + 3\alpha P + 3\beta Q \\ & = & \alpha(P' + 3P) + \beta(Q' + 3Q) \\ & = & \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q) \end{array}$$

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$$

2) On note $\mathscr{B} = (1, X, ..., X^n)$ la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$,
Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\varphi(X^k) = kX^{k-1} + 3X^k$
donc $\varphi(\mathscr{B}) = \big(\varphi(1), \varphi(X), ..., \varphi(X^n)\big)$ est une famille de degré échelonné.
$\varphi(\mathscr{B})$ est une famille libre de $n + 1$ vecteurs de E et $\dim(E) = n + 1$, donc c'est une base de E
donc *(Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base)*

$$\boxed{\varphi \text{ est une bijection}}$$

Ex 6 : 1) • φ est une application de E dans E.
• Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $(f, g) \in E^2$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\alpha f + \beta g) & = & (\alpha f + \beta g)' + 3(\alpha f + \beta g) \\ & = & \alpha f' + \beta g' + 3\alpha f + 3\beta g \\ & = & \alpha(f' + 3f) + \beta(g' + 3g) \\ & = & \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g) \end{array}$$

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$$

2) Soit $f \in E$,

$$\begin{array}{rcl} f \in \ker(\varphi) & \iff & \varphi(f) = 0 \\ & \iff & f' + 3f = 0 \\ & \iff & \exists k \in \mathbb{R} : \ f : x \longmapsto ke^{-3x} \\ & \iff & f \in \text{Vect} < x \longmapsto e^{-3x} > \end{array}$$

$$\boxed{\big(x \longmapsto e^{-3x}\big) \text{ est une base de Ker}(\varphi)}$$

3) On a montré dans le cours sur les équations différentielles que : (*Méthode de variations de la constante*)

quel que soit $g \in E$, l'équation $f' + 3f = g$ admet une solution.

Autrement dit $\boxed{\varphi \text{ est surjective}}$

4) Soit $f \in E$,

$$\begin{array}{rcl} f \in \ker(\varphi \circ \varphi) & \iff & \varphi(\varphi(f)) = 0 \\ & \iff & \varphi(f' + 3f) = 0 \\ & \iff & f'' + 3f' + 3(f' + 3f) = 0 \\ & \iff & f'' + 6f' + 9f = 0 \qquad \big(x^2 + 6x + 9 = (x - 3)^2\big) \\ & \iff & \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \ f : x \longmapsto \alpha e^{-3x} + \beta xe^{-3x} \\ & \iff & f \in \text{Vect} < x \longmapsto e^{-3x} , x \longmapsto xe^{-3x} > \end{array}$$

Or $\big(x \longmapsto e^{-3x} , x \longmapsto xe^{-3x}\big)$ est une famille libre *(cours sur les equa. diff.).*

$$\boxed{\big(x \longmapsto e^{-3x} , x \longmapsto xe^{-3x}\big) \text{ est une base de Ker}(\varphi \circ \varphi)}$$

La suite n'est pas corrigée.