Correction de la feuille Cours_6 : applications linéaires.

Ex 1 : 1) • On note $E = \mathbb{C}^2$,

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $u = (x, y) \in E$ et $v = (x', y') \in E$,

$\alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= \big(2(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y')\,,\,(\alpha x + \beta x')\,,\,2(\alpha y + \beta y')\big) \\ &= \alpha(2x + y, x, 2y) + \beta(2x' + y', x', 2y') \\ &= \alpha f(u) + \beta f(v) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est une application linéaire}}$

• Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $f \in C^0([0,1])$ et $g \in C^0([0,1])$,

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha f + \beta g) &= \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(t)\mathrm{d}t \\ &= \alpha \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \beta \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t \qquad \textit{(cours sur l'intégration)} \\ &= \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\Phi \text{ est une application linéaire}}$

• Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha P + \beta Q) &= X(\alpha P + \beta Q)' \\ &= X(\alpha P' + \beta Q') \qquad \textit{(cours sur les polynômes)} \\ &= \alpha X P' + \beta X Q' \\ &= \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire}}$

2) • $f((0,0)) \neq (0,0)$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas une application linéaire}}$.

• En posant $u = (1,1)$ et $\alpha = -1$ on a $\alpha g(u) = (-1, -2)$ et $g(\alpha u) = (1, -2) \neq (-1, -2)$ donc $\boxed{g \text{ n'est pas une application linéaire}}$.

• $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel donc $\boxed{\Phi \text{ n'est pas une application linéaire}}$

Ex 2 : • Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} u \in \ker(f) &\iff f(u) = (0,0,0) \\ &\iff (x + y, -x - y, 2x + 2y) = (0,0,0) \\ &\iff x + y = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\big((1,-1)\big) \text{ est une base de } \ker(f)}$$

• Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, on a alors : $P'(X) = b + 2cX$ et

$$\begin{aligned} P \in \ker(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0 \\ &\iff P(X) - \frac{1}{2}XP'(X) = 0 \\ &\iff a + bX + cX^2 - \frac{1}{2}X(b + 2cX) = 0 \\ &\iff a + \frac{1}{2}bX = 0 \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \textit{(un polynome est nul} \iff \textit{ses coefficients sont nuls)} \\ &\iff P(X) = cX^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{(X^2) \text{ est une base de } \ker(\varphi)}$$

Ex 3 : *(non corrigé)*

Ex 4 : • f

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect} < f(1,0); f(0,1) > & \textit{(l'image d'une base est une base de Im}(f)\textit{)} \\ & = & \mathrm{Vect} < (1,-1,2); (1,-1,2) > & \\ & = & \mathrm{Vect} < (1,-1,2) > & \end{array}$$

de plus $(1,-1,2) \neq (0,0,0)$ donc

$$\boxed{((1,-1,2)) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$$

• φ

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Im}(\varphi) & = & \mathrm{Vect} < \varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2) > & \textit{(l'image d'une base est une base de Im}(\varphi)\textit{)} \\ & = & \mathrm{Vect} < 1 \ ; \ \dfrac{X}{2} \ ; \ 0 > & \\ & = & \mathrm{Vect} < 1 \ ; \ X > & \end{array}$$

de plus $(1,X)$ est une famille libre
donc

$$\boxed{(1,X) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(\varphi)}$$

La suite n'est pas corrigée.