Correction de la feuille Cours_6_2 : applications linéaires en dimension finie.

Ex 1 : 1) a. $a(1,1)+b(0,1)=(0,0) \Rightarrow a=b=0$ donc $((1,1),(1,0))$ est libre
et comme c'est une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ on a : $\underline{((1,1),(1,0)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$
Et ainsi

$$\boxed{\text{il existe un unique endomorphisme } f \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } f((1,1))=(1,1) \text{ et } f((0,1))=(3,3).}$$

b. On remarque $u=x(1,1)+(y-x)(0,1)$ *(les coordonnées de u dans la base)*
éterminer l'image d'un vecteur $u=(x,y)$ quelconque de $\mathbb{R}^2$ par f.

2) a. Justifier qu'il existe un unique application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que :

$$f(1)=(0,0,0,0),\ f(X)=(1,1,0,0) \text{ et } f(X^2)=(0,0,1,1).$$

b. Déterminer l'image du polynôme $(X+1)^2$ par f.

Ex 2 : *(non corrigé)*
Ex 3 : *(non corrigé)*

Ex 4 : 1) $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, $\dim(\ker(f)=p$ et $\dim(E)=n$, donc $\boxed{0 \leqslant p \leqslant n}$

2) • On suppose $p=0$, on a alors $\ker(f)=\{0_E\}$ et f est injective.
on peut alors affirmer que f réalise une bijection de E dans $\mathrm{Im}(f)$ et ainsi que $\dim(\mathrm{Im}(f)=n$.

Remarque : Je n'ai pas eu cette idée au tableau.
Elle utilise : si f est une injection alors f réalise une bijection de E dans $f(E)$

• On suppose $p=n$, on a alors $\ker(f)=E$ et f est l'application nulle
on peut alors affirmer que $\mathrm{Im}(f)=\{0_E\}$ et ainsi que $\dim(\mathrm{Im}(f)=0$.

$$\boxed{\text{lorsque } p=0 \text{ et lorsque } p=n, \qquad \mathrm{rg}(f)+\dim(\ker(f))=n}$$

3) • 0_E appartient à $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)\cap\mathrm{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$ car ce sont deux sous-espaces vectoriels de E.

• Réciproquement prenons un vecteur u appartenant à $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$ et à $\mathrm{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$

il existe alors des réels $a_1,\dots,a_p$ et $b_{p+1},\dots,b_n$ tels que : $u=\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k e_k$ et $u=\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} b_k e_k$

on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k e_k-\sum_{k=p+1}^{n} b_k e_k=0_E$ et comme $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille libre il vient que tous les nombres $a_1,\dots,a_p,b_{p+1},\dots,b_n$ sont nuls et cela entraîne $u=0_E$.

En conclusion : $\boxed{\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)\cap\mathrm{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)=\{0_E\}}$

4) $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E donc $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\,(f(e_1),\dots,f(e_n))$
et comme $\forall i \in [\![1;p]\!],\quad f(e_i)=0_F$ on a bien :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\,(f(e_{p+1}),\dots,f(e_n))}$$

5) Soient $b_{p+1},\dots,b_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} b_k f(e_k)=0_F$,

comme f est linéaire on en déduit que : $\displaystyle f\left(\sum_{k=p+1}^{n} b_k e_k\right)=0_F$,

on a donc $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} b_k e_k \in \ker(f)$ d'où $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} b_k e_k$ appartient à $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$ et à $\mathrm{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$,

on peut en déduire avec le résultat de la question 3) que $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} b_k e_k=0_E$

et comme $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, on en déduit que tous les nombres $b_{p+1}, \dots, b_n$ sont nuls.

$$\boxed{\text{la famille } (f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)) \text{ est une famille libre}}$$

6) On a montré que $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est libre (Quest. 5) et génératrice (Quest.4) donc c'est est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et ainsi $\mathrm{rg}(f) = n - p$ et on sait que $p = \dim(\ker(f))$ donc on a bien :

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = n}$$

Ex 5 : *(Je rédige cette coorrection après avoir fini le cours sur application linéaire, ce qui me permet d'utiliser les matrices)*

1) a. Le rang de f est le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ dont les trois colonnes sont proportionnelles donc

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = 1}$$

b. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect} < f(1), f(X), f(X^2), f(X^3) >= \cdots = \mathrm{Vect} < \underbrace{1, X, X^2}_{\text{libre}} >$

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = 3}$$

c. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect} < f(1), f(X), f(X^2), f(X^3) >= \mathrm{Vect} < (1,1), (0,1), (0,1), (0,1) >= \mathrm{Vect} < \underbrace{(1,1), (0,1)}_{\text{libre}} >$

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = 3}$$

2) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ définie par $f((x,y,z)) = (x+y\,,\ y+z\,,\ x+z\,,\ x+y+z)$.

a. Le rang de f est égal à $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cdots = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = 3}$$

b. Le théorème du rang appliqué à f donne $\dim(\ker(f)) = 0$ est ainsi $\boxed{f \text{ est injective}}$

3) On note $E = \mathbb{R}_6[X]$ et f la forme linéaire $P(X) \longmapsto P(1)$

a. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect} < f(1), \dots, f(X^6) >= \mathrm{Vect} < 1, \dots, 1 >= \mathrm{Vect} < \underbrace{1}_{\text{libre}} >$

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = 1}$$

b. Le théorème du rang appliqué à f donne $\dim(\ker(f)) = 7 - \mathrm{rg}(f)$ est ainsi $\boxed{\dim(\ker(f)) = 6}$

c. Les vecteurs $(X-1)$, $(X-1)^3$, $(X-1)^4$, $(X-1)^5$, $(X-1)^6$ forment une famille libre de 6 vecteurs de $\ker(f)$, et comme a montré que $\dim(\ker(f)) = 6$ on peut conclure :

$$\boxed{\left((X-1), (X-1)^3, (X-1)^4, (X-1)^5, (X-1)^6\right) \text{ est une base de } \ker(f)}$$

4) *(non corrigé, juste les réponses)*

a. Le rang de f est égal à 2.

b. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(f)$.

Ex 6 : *(non corrigé)*