

Feuille Cours_6.3 : Matrice d'une application linéaire (*en dimension finie*).

Ex 1 : Dans les cas suivants déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$. (*On ne justifiera pas que f est linéaire.*)

- 1) f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $(x, y) \mapsto (3x - y, 3x + y)$
et les bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 1), (1, 0))$ et $\mathcal{B}_2 = ((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$.
- 2) $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ et les bases $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = (1, X - 1, (X - 1)^2)$.
 $P \mapsto (X - 1)P'(X)$

Ex 2 : On note f l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y + z)$$

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

On note : $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, 0))$.

Les familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. (*On ne le démontrera pas*)

Déterminer les matrices suivantes :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(f) \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}'}(f) \quad \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}'}(f) \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$$

Ex 3 : Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y - z, 2x + 3y + z)$ et $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - 2y + z, x - z)$

Déterminer les matrices de $f + g$ et de $-f + 2g$ dans la base canonique.

Ex 4 : 1) Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
 $(x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x + 3y)$ et $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - 2y + z)$.

Déterminer les matrices de $f \circ g$ et de $g \circ f$ dans les bases canoniques.

- 2) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$ défini par : $f(P) = (X - 1)P' + P$ et $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2)$
 - a. Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.
 - b. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}$.

- Ex 5 :** 1) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à P associe $(P(1), P'(1), P''(1))$.
- a. Montrer que f est un isomorphisme.
 - b. Déterminer la matrice de f^{-1} dans les bases canoniques.
- 2) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$ défini par : $f(P) = (X - 1)P' + P$ et $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2)$
- a. Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.
 - b. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$.
 - c. Déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

Ex 6 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Quelle est l'image par f du vecteur $(1, -1, 2)$?
- 2) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
- 3) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

Ex 7 : On note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à (x, y, z) associe (x', y', z') tel que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \\ z' = -x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \end{cases}$$

- 1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
- 2) En déduire que : $f \circ f = f$.
- 3) Déterminer f^n pour tout entier naturel n .

Ex 8 : On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer une base du noyau de f .
- 2) Déterminer une base de l'image de f .

Ex 9 : On note $\mathcal{B}$ la base $(1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$ et

$$f \text{ l'endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X] \text{ dont la matrice dans la base } \mathcal{B} \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer une base du noyau de f .
- 2) Déterminer une base de l'image de f .

Ex 10 : (*)

- 1) On suppose connaître une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall u \in E, \text{Coord}_{\mathcal{C}}(f(u)) = A \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$$

- ① Montrer que f est linéaire.
- ② Montrer que : $\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, la j ième colonne de A est $\text{Coord}_{\mathcal{C}}(f(e_j))$.

- 2) On suppose que : f est linéaire et que A est la matrice définie par :

$$\text{pour tout } j \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ la } j \text{ ième colonne de } A \text{ est } \text{Coord}_{\mathcal{C}}(f(e_j))$$

$$\text{Montrer que : } \forall u \in E, \text{Coord}_{\mathcal{C}}(f(u)) = A \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u).$$

- 3) Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & \varphi: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x+y, -x-y, 2x+2y) & P(X) \longmapsto (P(0), P(1), P(-1)) \end{array}$$

- 4) On note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$\text{Soit } f \text{ l'application linéaire de } \mathbb{R}_2[X] \text{ dans } \mathbb{R}^3 \text{ vérifiant } \forall P \in \mathbb{R}_2[X], \text{Coord}_{\mathcal{B}_2}(f(P)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{Coord}_{\mathcal{B}_1}(P)$$

Quelle est l'image de $1 + 2X^2$ par f ?