BCPST 2$_A$ Nom : ....
Prénom : ....

Feuille Blitz_5 : Applications linéaires.

10 minutes

C'est un exercice de rapidité, vous avez le droit à un brouillon, les réponses doivent être ***courtes et rigoureuses****.*

Répondre aux questions ci-dessous sur le modèle suivant :

f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par $f((x,y,z)) = (x-y, x+y+z, 2x+z)$.
On remarque que $f((1,0,-2)) = (0,0,0)$

Question : f est-elle injective ? Oui ☐ Non ■

Justification : car $\ker(f) \neq \{(0,0,0)\}$

Théorème : Une application linéaire de E dans F est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{0_E\}$

Dans les questions de 1) à 3) on n'utilisera pas le théorème du rang.

1. f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par : $f((x,y,z)) = (x+y, x+z, y-z)$

On note $\mathscr{B}$ la famille $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ et $f(\mathscr{B})$ la famille $\big(f((1,0,0)), f((1,1,0)), f((1,1,1))\big)$
on remarque que $f(\mathscr{B}) = \big((1,1,0),(2,1,1),(2,2,0)\big)$

Question 1 : $\mathscr{B}$ est-elle libre ? Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Question 2 : $f(\mathscr{B})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Question 3 : f est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$? Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Théorème : ....

2. f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ définie par : $f(1) = X^2+2$ $\quad f(X) = 2$ $\quad f(X^2) = X+2$ $\quad f(X^3) = X^3$

On note $\mathscr{F}$ la famille $(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$

Question 1 : $\mathscr{F}$ est-elle libre ? Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Théorème : ....

Question 2 : $\mathscr{F}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$? Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Théorème : ....

Question 3 : f est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$? Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Théorème : ....

3. f désigne l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(P) = \big(P(0)\,,\, P(0) - 2P''(0)\,,\, P''(0)\big)$

On remarque que : $\ker(f) = \text{Vect} < X >$

Question 1 : f est-elle injective ? Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Théorème : ....

Question 2 : f est-elle surjective ? Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Théorème : ....

Dans la suite vous pouvez utiliser le théorème du rang.

Commencez par me donner le théorème du rang :

....

....

4. f désigne l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par : $f\big((x,y,z)\big) = \big(x+y\ ,\ y+z\ ,\ z+x\ ,\ x+y+z\big)$

On remarque que : Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f((x,y,z)) = (0,0,0,0) \iff (x,y,z) = (0,0,0)$

Question 1 : f est-elle injective ? Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Théorème : ....

Question 2 : $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$? Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Théorème : ....

5. f désigne l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f\big(P\big) = \big(P(0), P(1)\big)$

On remarque que : $f(X) = (0,1)$ et $f(1-X) = (1,0)$

Question 1 : f est-elle surjective ? Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Théorème : ....

Question 2 : $\dim(\ker(f)) = 2$? Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Théorème : ....

Question 3 : $\big(X(X-1)\ ,\ X^2(X-1)\big)$ est une famille libre de $\ker(f)$?

Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Théorème : ....

Question 4 : $\big(X(X-1)\ ,\ X^2(X-1)\big)$ est une base de $\ker(f)$?

Oui ☐ Non ☐

Justification : car ....

Théorème : ....

6. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base d'un espace vectoriel E et p un entier vérifiant $1 < p < n$.

Montrer que : $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \cap \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) = \{0_E\}$

....

....

....

....