BCPST 2_A Nom : .... Prénom : Correction

Feuille Blitz_5 : Applications linéaires.

10 minutes

C'est un exercice de rapidité, vous avez le droit à un brouillon, les réponses doivent être ***courtes et rigoureuses****.*

Répondre aux questions ci-dessous sur le modèle suivant :

f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par $f((x,y,z)) = (x-y, x+y+z, 2x+z)$.
On remarque que $f((1,0,-2)) = (0,0,0)$

Question : f est-elle injective ? Oui ☐ Non ■

Justification : car $\ker(f) \neq \{(0,0,0)\}$

Théorème : Une application linéaire de E dans F est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{0_E\}$

Dans les questions de 1) à 3) on n'utilisera pas le théorème du rang.

1. f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par : $f((x,y,z)) = (x+y, x+z, y-z)$

On note $\mathscr{B}$ la famille $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ et $f(\mathscr{B})$ la famille $\big(f((1,0,0)), f((1,1,0)), f((1,1,1))\big)$

on remarque que $f(\mathscr{B}) = \big((1,1,0),(2,1,1),(2,2,0)\big)$

Question 1 : $\mathscr{B}$ est-elle libre ? Oui ☒ Non ☐

Justification : car $a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) = (0,0,0) \Longrightarrow a = b = c = 0$

Question 2 : $f(\mathscr{B})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Oui ☐ Non ☒

Justification : car $(2,2,0) = 2 \times (1,1,0)$

Question 3 : f est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$? Oui ☐ Non ☒

Justification : car $\mathscr{B}$ est une base et $f(\mathscr{B})$ n'est pas une base.

Théorème : f est bijective $\Longleftrightarrow$ l'image d'une base par f est une base.

2. f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ définie par : $f(1) = X^2 + 2 \quad f(X) = 2 \quad f(X^2) = X + 2 \quad f(X^3) = X^3$

On note $\mathscr{F}$ la famille $(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$

Question 1 : $\mathscr{F}$ est-elle libre ? Oui ☒ Non ☐

Justification : car $f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)$ sont de degré 2 à 2 $\neq$.

Théorème : Une famille de polynômes de degrés 2 à 2 distincts est libre.

Question 2 : $\mathscr{F}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$? Oui ☒ Non ☐

Justification : car $\mathscr{F}$ est libre, $\mathscr{F}$ est une liste 4 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.

Théorème : Dans un espace vectoriel de dimension n, une famille libre de n vecteurs est une base.

Question 3 : f est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$? Oui ☒ Non ☐

Justification : car l'image de la base canonique est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Théorème : f est bijective $\Longleftrightarrow$ $f(\mathscr{B})$ est une base de F

3. f désigne l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(P) = \big(P(0)\,,\, P(0) - 2P''(0)\,,\, P''(0)\big)$

On remarque que : $\ker(f) = \mathrm{Vect} < X >$

Question 1 : f est-elle injective ? Oui ☐ Non ☒

Justification : car $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$

Théorème : f est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

Question 2 : f est-elle surjective ? Oui ☐ Non ☒

Justification : car $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathbb{R}^3)$ et f non injective.

Théorème : Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective.

Dans la suite vous pouvez utiliser le théorème du rang.

Commencez par me donner le théorème du rang :

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie

$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$.

4. f désigne l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par : $f\big((x,y,z)\big) = \big(x+y\,,\,y+z\,,\,z+x\,,\,x+y+z\big)$

On remarque que : Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f((x,y,z)) = (0,0,0,0) \iff (x,y,z) = (0,0,0)$

Question 1 : f est-elle injective ? Oui ☒ Non ☐

Justification : car $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$

Théorème : f injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{0_E\}$

Question 2 : $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$? Oui ☒ Non ☐

Justification : car $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 3$

Théorème : théorème du rang.

5. f désigne l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f\big(P\big) = \big(P(0), P(1)\big)$

On remarque que : $f(X) = (0,1)$ et $f(1-X) = (1,0)$

Question 1 : f est-elle surjective ? Oui ☒ Non ☐

Justification : car $\mathrm{Vect}((0,1),(1,0)) \subset \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

Théorème : f surjective $\iff \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Question 2 : $\dim(\ker(f)) = 2$? Oui ☐ Non ☐

Justification : car $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - 2 = 2$

Théorème : Théorème du rang

Question 3 : $\big(X(X-1)\,,\,X^2(X-1)\big)$ est une famille libre de $\ker(f)$?

Oui ☒ Non ☐

Justification : car $\deg(X(X-1)) \neq \deg(X^2(X-1))$

Théorème : Une famille de polynômes de degré différents est libre

Question 4 : $\big(X(X-1)\,,\,X^2(X-1)\big)$ est une base de $\ker(f)$?

Oui ☒ Non ☐

Justification : car c'est une famille libre de 2 vecteurs de $\ker(f)$ et $\dim(\ker(f)) = 2$

Théorème : En dimension n une famille libre de n vecteurs est une base

6. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base d'un espace vectoriel E et p un entier vérifiant $1 < p < n$.

Montrer que : $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \cap \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) = \{0_E\}$

Il suffit de montrer l'inclusion $\subset$

Soit $u \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \cap \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$, on a alors

$u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$ et $u = \sum_{i=p+1}^{n} \beta_i e_i$ ce qui entraîne $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i - \sum_{i=p+1}^{n} \beta_i e_i = 0_E$

or $(e_1, \dots, e_n)$ est libre donc il vient $\begin{cases} \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0 \\ \beta_{p+1} = \dots = \beta_n = 0 \end{cases}$ et ainsi $u = 0_E$ $\blacksquare$