Feuille_info_15 : La méthode d'Euler

1. (a) Résoudre le problème de Cauchy : $y' = 2y + t$ avec $y(0) = 1$
   (b) Mettre en oeuvre la méthode d'Euler pour approcher la solution.
   (c) Comparer votre résultat à la solution : $t \longmapsto \frac{5}{4}e^{2t} - \frac{2t+1}{4}$.
      i. En comparant $y(2)$ de la solution et la valeur approchée.
      ii. En représentant les deux courbes

2. (a) Appliquer la méthode d'Euler au problème suivant pour t dans l'intervalle $[0, 30]$

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -x(t) \end{cases}$$

   On tracera x en fonction de t, y en fonction de t et y en fonction de x.
   (b) Déterminer la solution du problème différentiel précédent.

3. Résoudre avec la méthode d'Euler : $y'' = 2y' + 3y + 1$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
   Vous comparerez votre résultat à la solution : $t \longmapsto -\frac{1}{3} + e^{-t} + \frac{e^{3t}}{3}$

4. On considère le problème différentiel suivant :

$$\text{sur } [0, 10], \quad \begin{cases} y'(t) = y(t) - y(t)^2 \\ y(5) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   (a) Reconnaître le type d'équation proposée et le modèle auquel elle correspond.
   (b) Appliquer la méthode d'Euler pour approcher la solution sur l'intervalle.
   (c) Déterminer une expression explicite de la solution.
   (Classique, pas au programme, demander de l'aide si nécessaire)

5. On considère le système différentiel suivant :

$$\text{sur } [1, 9], \quad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - x(t)y(t) & x(1) = 1 \\ y'(t) = 2x(t)y(t) - y(t) & y(1) = 2 \end{cases}$$

   (a) Décrire la nature du modèle proposé.
   (b) Mettre en oeuvre la méthode d'Euler pour approcher la solution sur $[1, 9]$.
   (c) Tracer la trajectoire $(x(t), y(t))$ pour t dans $[1, 9]$.

6. Pendule simple *(modèle non linéaire)*.

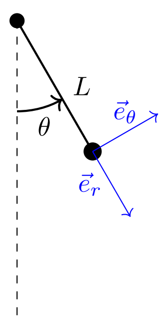

FIGURE 1 – Pendule simple.

(a) Expliquer avec le principe fondamental de la dynamique l'équation du pendule simple :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$$

On pose : $\omega^2 = \dfrac{g}{L}$

(b) Mettre en œuvre la méthode d'Euler dans le cas suivant :

$$L = 1\,\mathrm{m} \qquad \ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) = 0 \qquad \theta(0) = 10 \text{ deg} \qquad \dot{\theta}(0) = 0$$

(c) En faisant l'approximation des petits angles retrouver l'équation de l'oscillateur harmonique simple.

(d) Résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique simple avec les conditions initiales de (b) et représenter sur un même graphique :
- la solution approchée par la méthode d'Euler.
- la solution analytique obtenue dans cette question.

(e) Si vous avez le temps vous pouvez ajouter un terme d'amortissement :

$$\theta''(t) + 2\lambda\theta'(t) + \omega_0^2 \sin\big(\theta(t)\big) = 0$$