Feuille_Exo_11 : Applications linéaires.

Ex 1 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la famille de vecteurs :

$$u_1 = (1, -1, 2), \quad u_2 = (2, 0, 1), \quad u_3 = (3, -1, 3), \quad u_4 = (1, 1, 0).$$

1) Déterminer la matrice de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Calculer le rang de cette famille.
3) La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Ex 2 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ on considère la famille de vecteurs formée de :

$$P_1 = (X-1)^2 \quad ; \quad P_2 = (X+1)^2 \quad ; \quad P_3 = (X-1)^3 \quad ; \quad P_4 = (X+1)^3$$

1) Déterminer la matrice de (P_1, P_2, P_3, P_4) dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.
2) En déduire le rang de (P_1, P_2, P_3, P_4).
3) (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

Ex 3 : On note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par : $f(x, y, z) = (x + y - z,\ 2x - z,\ x + 3y)$.

1) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2) Calculer le rang de A.
3) En déduire $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Ex 4 : On considère l'application linéaire $T : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par : $T(P) = P' + P$.

1) Écrire la matrice de T dans la base $(1, X, X^2)$.
2) Déterminer le rang de T.
3) L'application T est-elle injective ? surjective ?

Ex 5 : On définit l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ par : $g(x, y, z) = (x - 2y + z,\ 3x + y)$.

1) Donner la matrice de g dans les bases canoniques.
2) Déterminer le rang de g.
3) Donner une base du noyau $\ker(g)$.

Ex 6 : On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'endomorphisme linéaire $T : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ par : $T(P) = P' + P$,

1) Justifier que T est bien une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.
2) Écrire la matrice de T dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
3) Déterminer le rang de T.

Ex 7 : On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n, avec $n \geq 2$.
On définit l'application linéaire : $T : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], \qquad T(P) = P''$

1) Vérifier que T est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Écrire la matrice de T dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
3) Montrer que cette matrice est nilpotente.
4) Déterminer le noyau $\ker(T)$.
5) Calculer le rang de T.
6) L'application T est-elle un isomorphisme ?

Ex 8 : Soit $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice, dans la base canonique,

$$A_a = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 0 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le rang de f_a en fonction de a.
2) Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f_a est-il bijectif ?
3) Déterminer $\ker(f_a)$ pour les valeurs où f_a n'est pas bijectif *(s'il y en a)*.

Ex 9 : Soient $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{R}^2$.
On définit deux applications linéaires $f : E \to F$, $\quad g : F \to G \quad$ par

$$f(x,y,z) = (x+y,\ y+z), \qquad g(u,v) = (u-v,\ 2u+v).$$

1) Déterminer les matrices de f et g dans les bases canoniques.
2) Calculer le rang de f et celui de g.
3) Déterminer la matrice de la composée $h = g \circ f$ dans les bases canoniques.
4) Calculer le rang de h.
5) Vérifier que $\mathrm{rg}(h) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.
6) $(**)$ Montrer que l'on peut généraliser ce résultat :
   si E, F, G sont des espaces vectoriels de dimension finie, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\big(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\big)$.
   Indications : • *on montrera que* $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$ *et* $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$
   • *on pourra commencer par montrer que* $ker(f) \subset ker(g \circ f)$

Ex 10 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E.
On définit l'endomorphisme f par $\quad f(e_1) = e_1 + e_2, \qquad f(e_2) = e_2 + e_3, \qquad f(e_3) = e_1 - e_3$

1) Écrire la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).
2) Déterminer le rang de f.
3) Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$

Ex 11 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{C}$, muni de la base (e_1, e_2, e_3), et soit $a \in \mathbb{C}$.
On définit l'endomorphisme $f_a : E \to E$ par

$$f_a(e_1) = e_1 + ae_2, \qquad f_a(e_2) = e_2 + ae_3, \qquad f_a(e_3) = ae_1 + e_3.$$

1) Écrire la matrice de f_a dans la base (e_1, e_2, e_3).
2) Calculer le rang de f_a en fonction de a.
3) Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f_a est-il un automorphisme ?
4) Pour les valeurs de a où f_a n'est pas un automorphisme, déterminer une base de $\ker(f_a)$ et de $\mathrm{Im}(f_a)$.

Ex 12 : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, de base $(1, X, X^2, X^3)$.
On définit l'endomorphisme $T : E \to E$ par

$$T(1) = X, \qquad T(X) = X - 1, \qquad T(X^2) = X^2 + X^3, \qquad T(X^3) = 1 + X.$$

1) Écrire la matrice de T dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.
2) Calculer le rang de T.
3) Déterminer une base de $\ker(T)$ et de $\mathrm{Im}(T)$.

Ex 13 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $(J)_{i,j} = 1$,
et on note f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à tout X associe JX.

1) Quelle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?
2) Déterminer le rang de f.
3) Déterminer une matrice $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que : $f(U) = nU$
4) Déterminer la dimension de $\ker(f)$, puis une base de $\ker(f)$.
5) Donner une base $\mathscr{B}$, telle que $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ on note Δ cette matrice.
6) $(*)$[1] En déduire une matrice inversible P telle que : $J = P\Delta P^{-1}$ *(on cherchera P telle que $JP = P\Delta$)*

1. Difficile avant la diagonalisation