Correction de la feuille_Exo_11 : Applications linéaires.

Ex 1 : 1) La matrice de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) &= \operatorname{rg}(M) \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) = 3}$$

3) La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) n'est pas libre car elle est formée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

En effet : En dimension n une famille libre a au plus n vecteurs.

donc

$$\boxed{\text{La famille } (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^3}$$

Remarque : La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. (Savez-vous le justifier ?)

Ex 2 :

Ex 3 : 1) En notant $\mathscr{B}$, on doit construire la matrice de $f(\mathscr{B})$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

2)

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = 3}$$

3) $\operatorname{rg}(f) = rg(A)$, or f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donc f est bijective et ainsi :

$$\boxed{\ker(f) = \{(0,0,0)\} \text{ et } \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$$

Ex 4 : *(non corrigée)*

Ex 5 : *(non corrigée)*

Ex 6 : *(non corrigée)*

Ex 7 : *(En classe on a étudié cet endomorphisme sans répondre dans l'ordre aux questions.)*

1) • Quand on prend un polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $T(P) = P''$ est bien élément de $\mathbb{R}_n[X]$.
• $P \longmapsto P''$ est linéaire *(cours sur les polynômes).*
donc

$$\boxed{T \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

2) Pour tout k, $T(X^k) = k(k-1)X^{k-2}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

Pour ceux qui maitrisent les indicatrices :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T) = \Big((j-1)(j-2)\,\mathbb{1}_{j=i+2}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$$

(Les indicatrices sont aussi très pratiques sur l'étude des matrices, mais on peut faire sans)

3) *(Je ne voulais pas faire cette question, car la notion est hors programme)*
On rappelle qu'une matrice carrée M est *nilpotente* lorsqu'il existe un entier p tel que $M^p = 0_n$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $T^n(P) = P^{(2n)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$, donc T^n est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}_n[X]$.
On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T^n) = 0_n$ et ainsi que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T)^n = 0_n$

$$\boxed{\text{La matrice de } T \text{ dans la base canconique est nilpotente}}$$

4) *(je n'ai pas fait comme ça au tableau)*
Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} akX^k$ unn polynôme quelconque,

$$\begin{aligned} P \in \ker(T) &\iff P'' = 0 \\ &\iff \sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)X^{k-2} = 0 \\ &\iff \forall k \geqslant 2,\ a_k = 0 \\ &\iff P(X) = a_0 + a_1 X \end{aligned}$$

$$\boxed{\ker(T) = \mathrm{Vect} < 1\,,\, X >}$$

Remarque : $(1, X)$ est libre donc c'est une base de $\ker(T)$.

5) Le théorème du rang appliqué à T donne $\mathrm{rg}(T) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\ker(T))$

$$\boxed{\mathrm{rg}(T) = n - 1}$$

6) Le noyau de T n'est pas réduit au vecteur nul donc

$$\boxed{\text{L'application } T \text{ n'est pas un isomorphisme}}$$

Ex 8 : *(non corrigé)*

Ex 9 : On note $\mathscr{B}_3$, $\mathscr{B}_2$ les matrices canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$

1) La matrice de f dans les bases canoniques est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   et la matrice de g dans la base canonique est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ *(Les deux lignes ne sont pas proportionnelles)*

   $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$ *(Le déterminant est non nul)*

3) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

4) $\mathrm{rg}(h) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2$ *(Les deux lignes ne sont pas proportionnelles)*

5) Les trois applications sont de rang 2 donc on a bien $\boxed{\mathrm{rg}(h) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))}$

6) *(rapidement)*
   - $\mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(g\circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(g))$

$$\boxed{\mathrm{rg}(g\circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)}$$

   - $\ker(f) \subset \ker(g\circ f)$ donc $\dim(\ker(f)) \leqslant \dim(\ker(g\circ f))$

     il vient $\dim(E) - \dim(\ker(g\circ f)) \leqslant \dim(E) - \dim(\ker(f))$

     et en utilisant le théorème du rang on obtient bien :

$$\boxed{\mathrm{rg}(g\circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)}$$

Remarques

$\mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ car si $z = g(f(x))$ alors $z = g(y)$ en posant $y = f(x)$

$\ker(f) \subset \ker(g\circ f)$ car si $f(x) = 0_F$ alors $g(f(x)) = 0_G$

Ex 10 : On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$

1) La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

2)

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = 2}$$

3) *(Rédaction type : Concentrez-vous sur le raisonnement, en pratique on n'en fera pas autant !!)*

Soit $u \in E$, on note $\mathrm{Coord}_{\mathbb{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
u \in \ker(f) &\iff f(u) = 0_E \\
&\iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\mathrm{Coord}_{\mathbb{B}}(u) = 0_{3\times 1} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect} < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \\
&\iff u \in \mathrm{Vect} < -e_1 + e_2 + e_3 >
\end{aligned}$$

$$\boxed{(-e_1 + e_2 + e_3) \text{ est une base de } \ker(f)}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect} < \mathrm{Coord}_{\mathbb{B}}(e_1), \mathrm{Coord}_{\mathbb{B}}(e_2), \mathrm{Coord}_{\mathbb{B}}(e_3) > &= \mathrm{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} > \\
&= \mathrm{Vect} < \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} > \qquad \textit{car } C_3 = C_1 - C_2
\end{aligned}$$

donc $\quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect} < e_1, e_2, e_3 >= \mathrm{Vect} < \underbrace{e_1 + e_2 \,,\, e_2 + e_3}_{\text{libre}} >$

$$\boxed{(e_1 + e_2 \,,\, e_2 + e_3) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$$

Ex 11 : *(non corrigé)*

Ex 12 : *(non corrigé)*

Ex 13 : *(non corrigé)*