# Feuille_Act_14 : Rédaction d'un raisonnement.

**Ex 1.** On s'intéresse à l'équation :

$$\sqrt{x+1} = x \qquad \text{sur} \quad [-1;+\infty[$$

*Un élève rédige le raisonnement suivant :*

> Soit $x \in [-1;+\infty[$ tel que $\sqrt{x+1} = x$ ,
> on a alors $x+1 = x^2$ et ainsi $x$ est racine de $X^2 - X - 1$.
> le discriminant de ce polynôme est 5 donc ses racines sont : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
> on a donc $\quad x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1) Ce raisonnement est-il rigoureux et correctement rédigé ?
2) S'il est bien rigoureux, que démontre ce raisonnement ?
3) Quel est l'ensemble des réels $x$ qui vérifie $\sqrt{x+1} = x$ ?

**Ex 2.** On s'intéresse à l'équation :

$$z^5 = |z| \qquad \text{sur} \quad \mathbb{C}$$

*Un élève rédige le raisonnement suivant :*

> Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z^5 = |z|$.
> En prenant le module, on obtient $|z|^5 = |z|$.
> Comme $z \neq 0$, on peut diviser par $|z|$ et cela donne $|z|^4 = 1$.
> Comme le module est positif, on en déduit que $|z| = 1$.
> ce qui permet de conclure que : $\quad \exists \theta \in [0, 2\pi[ : \; z = e^{i\theta}$.

1) Ce raisonnement est-il rigoureux et correctement rédigé ?
2) S'il est bien rigoureux, que démontre ce raisonnement ?
3) Quel est l'ensemble des nombres complexes $z$ qui vérifie $|z|^5 = |z|$ ?

**Ex 3.** On s'intéresse aux matrices $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$A^2 = I_2$$

*Un élève rédige le raisonnement suivant :*

> Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\; A^2 = I_2$,
> on a alors $A^2 - I_2 = 0$ et ainsi $(A - I_2)(A + I_2) = 0$
> donc $\; A = I_2 \;$ ou $\; A = -I_2$

1) Ce raisonnement est-il rigoureux et correctement rédigé ?
2) S'il est bien rigoureux, que démontre ce raisonnement ?
3) Déterminer au moins 3 matrices distinctes $A$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = I_2$ ?

**Ex 4.** On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$(E)\ :\quad y'(t)+y^2(t)=e^t$$

*Un élève rédige le raisonnement suivant :*

> Soit $a\in\mathbb{R}$, on note $g : t\longmapsto ae^t$ une solution de $(E)$
>
> on a alors pour tout $t\in\mathbb{R}$, $g'(t)+g^2(t)=e^t$ d'où $ae^t+ae^{2t}=e^t$
>
> en prenant $t=0$ il vient $2a=1$ donc $g : t\longmapsto \dfrac{1}{2}e^t$

1) Ce raisonnement est-il rigoureux et correctement rédigé ?
2) S'il est bien rigoureux, que démontre ce raisonnement ?
3) Savez-vous résoudre cette équation différentielle ?

**Ex 5.** On veut trouver toutes les fonctions $f$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$(E)\qquad \forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

*Un élève rédige le raisonnement suivant :*

> Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$
>
> on a alors $f'$ dérivable sur $\mathbb{R}$ *(comme composée de fonctions dérivables)* et pour $x\in\mathbb{R}$,
>
> $$\begin{aligned} f''(x) &= -f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &= -f\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\\ &= -f(x)\end{aligned}$$
>
> $f$ est donc solution de l'équation $y''+y=0$, et ainsi :
>
> $$\boxed{\text{il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que : } \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=a\cos(x)+b\sin(x)}$$

1) Ce raisonnement est-il rigoureux et correctement rédigé ?
2) S'il est bien rigoureux, que démontre ce raisonnement ?
3) Quel est l'ensemble des fonctions $f$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ ?