Correction de la feuille Blitz_6 : Applications linéaires.

Exercices faits en classe

Une remarque pour Gabin (et les autres) :

"avoir un sens mathématique" signifie ici "être défini dans le cours de mathématiques".

1. Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces vectoriels.

Quelle hypothèse sur f permet d'écrire : $\forall (a,b) \in E^2, \quad f(a) = f(b) \iff a = b$?

f est linéaire □ f est bijective ■ f est surjective □ f est injective ■

2. On note f la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par : $(x,y,z) \longmapsto x+y+z$.
On démontre que le rang de f est 1 et son noyau admet pour base $((1,-1,0),(1,0,-1)$

1) Le noyau de f est fini : vrai □ faux ■
2) L'image de f est de dimension finie : vrai ■ faux □
3) Le noyau est de dimension 3 : vrai □ faux ■

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1) L'expression « dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ » a-t-elle un sens mathématique ? Oui ■ Non □
   Si oui, que vaut-elle : n^2
2) L'expression « dimension de A » a-t-elle un sens mathématique ? Oui □ Non ■
3) L'expression « rang de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ » a-t-elle un sens mathématique ? Oui □ Non ■
4) L'expression « rang de A » a-t-elle un sens mathématique ? Oui ■ Non □
   Si oui, qu'est-ce que c'est : La dimension de l'espace engendré par les colonnes de A.
5) L'expression « noyau de A » a-t-elle un sens mathématique ? Oui ■ Non □
   Si oui, qu'est-ce que c'est : Le noyau de l'application $X \longmapsto AX$
6) L'expression « noyau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ » a-t-elle un sens mathématique ? Oui □ Non ■

4. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

on remarque en faisant : $L_3 - L_1 \to L_3$ que $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) A est une matrice triangulaire : vrai □ faux ■
2) A est une matrice inversible : vrai ■ faux □
3) A est une matrice symétrique : vrai ■ faux □

5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

1) Affirmation : $(\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = 0_{n,1}) \iff A = 0_n$
   Vrai ■ Faux □
2) Affirmation : $\Big(\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = 0_{n,1} \iff X = 0_{n,1}\Big) \iff \operatorname{rg}(A) = n$
   Vrai ■ Faux □
3) Affirmation : $\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \big(AB = 0_n \iff B = 0_n\big)$
   Vrai □ Faux ■ *(sauf si $X \mapsto AX$ est injective)*
4) Affirmation : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \big(AX = 0_{n,1} \iff X = 0_{n,1}\big)$
   Vrai □ Faux ■ *(sauf si $X \mapsto AX$ est injective)*

6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible

1) Affirmation : $\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \big(AB = 0_n \iff B = 0_n\big)$

Vrai ■ Faux □

2) Affirmation : $\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad AB = BA$

Vrai □ Faux ■

3) Affirmation : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \big(AX = 0_{n,1} \iff X = 0_{n,1}\big)$

Vrai ■ Faux □

7. Soit E un espace vectoriel, $\mathscr{B}$ une base de E et f un endomorphisme de E.

1) L'expression « dimension de $\mathscr{B}$ » a-t-elle un sens mathématique ? Oui □ Non ■

2) L'expression « image de f » a-t-elle un sens mathématique ? Oui ■ Non □
Si oui, qu'est-ce que c'est : $\{f(u) \mid u \in E\}$

3) L'expression « rang de $\mathscr{B}$ » a-t-elle un sens mathématique ? Oui ■ Non □
Si oui, qu'est-ce que c'est : $\dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{B}))$

4) L'expression « image de $\mathscr{B}$ » (sans préciser par quoi) a-t-elle un sens mathématique ? Oui □ Non ■

5) L'expression « dimension de f » a-t-elle un sens mathématique ? Oui □ Non ■

6) L'expression « rang de $\mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ » a-t-elle un sens mathématique ? Oui □ Non ■

7) L'expression « dimension de $\mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ » a-t-elle un sens mathématique ? Oui ■ Non □
Si oui, que vaut-elle : le nombre de vecteurs dans une base de $\mathrm{Vect}(\mathscr{B})$.

8) L'expression « image de $\mathscr{B}$ par f » a-t-elle un sens mathématique ? Oui ■ Non □
Si oui, qu'est-ce que c'est : $(f(e_1), ..., f(e_n))$ où $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$

8. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E.

On note f l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

On s'intéresse à l'équivalence :

$$f(u) = 0_E \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quelles propriétés de $\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\,.\,)$ permettent d'assurer cette équivalence ?

$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\,.\,)$ est linéaire ■ Pour justifier : $\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\,0_E\,) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\,.\,)$ est bijective ■ Pour justifier : l'équivalence : $f(u) = 0_E \iff \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\,f(u)\,) = \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\,0_E\,)$

$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(f(.) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(.)$ ■ Pour justifier : $\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\,f(u)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$