Correction de la feuille_Act_14 : Rédaction d'un raisonnement.

Cette feuille a été écrite pour expliquer des erreurs de rédaction courantes dans vos copies.

Les notions travaillées ici sont essentiellement l'implication : "Si ... Alors ..." et l'équivalence " ... si, et seulement si, ...". Nous les voyons à travers leur mise en œuvre avec respectivement les déductions " ... donc ..." et les expressions d'équivalence " ... qui équivaut à ..."

Travaillez les rédactions "classiques" pour éviter les erreurs de rédaction.

Le type de raisonnement étudié ici est l'Analyse-Synthèse.

Ex 1. On s'intéresse à l'équation :

$$\sqrt{x+1} = x \qquad \text{sur} \quad [-1;+\infty[$$

Un élève rédige le raisonnement suivant :

> Soit $x \in [-1;+\infty[$ tel que $\sqrt{x+1} = x$,
>
> on a alors $x+1 = x^2$ et ainsi x est racine de $X^2 - X - 1$.
>
> le discriminant de ce polynôme est 5 donc ses racines sont : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
>
> on a donc $\quad x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1) Ce raisonnement est rigoureux et correctement rédigé. *(Mais il est inachevé si on veut les solutions de l'équation)*

2) Ce raisonnement démontre :

$$\text{Si } x \text{ est une solution de } (E) \text{ alors } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

3) On note $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

D'après le raisonnement ci-dessus, les solutions de (E) appartiennent à l'ensemble $\{x_1, x_2\}$.

Réciproquement, cherchons dans cette ensemble les réels solutions.

- $x_1 < 0$ donc $\sqrt{x_1+1} \neq x_1$ et ainsi x_1 n'est pas une solution.
- $x_2 > 0$ et $x_2^2 = x_2 + 1$ donc $x_2 = \sqrt{x_2+1}$ et ainsi x_2 est une solution.

En conclusion :

$$\boxed{\text{Cette équation a une unique solution : } \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Ex 2. On s'intéresse à l'équation :

$$z^5 = |z| \qquad \text{sur} \quad \mathbb{C}$$

Un élève rédige le raisonnement suivant :

> Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z^5 = |z|$.
>
> En prenant le module, on obtient $|z|^5 = |z|$.
>
> Comme $z \neq 0$, on peut diviser par $|z|$ et cela donne $|z|^4 = 1$.
>
> Comme le module est positif, on en déduit que $|z| = 1$.
>
> ce qui permet de conclure que : $\quad \exists \theta \in [0, 2\pi[: \ z = e^{i\theta}$.

1) Ce raisonnement est rigoureux et correctement rédigé. *(Mais il est inachevé si on veut les solutions de l'équation)*

2) On a démontré que les seuls complexes z non nuls susceptibles d'être solution vérifie $\exists \theta \in [0, 2\pi[: \ z = e^{i\theta}$.

3) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$, on note $z = e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} z^5 = |z| &\iff e^{5i\theta} = 1 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : \; 5\theta = 0 + 2k\pi \\ &\iff z \in \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : *(ne pas oublier zéro qui est solution)*

$$\left\{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\}$$

Ex 3. On s'intéresse aux matrices $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$A^2 = I_2$$

Un élève rédige le raisonnement suivant :

> Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_2$,
>
> on a alors $A^2 - I_2 = 0$ et ainsi $(A - I_2)(A + I_2) = 0$
>
> donc $A = I_2$ ou $A = -I_2$

1) Non il y a une erreur de raisonnement, la dernière déduction est fausse.
Non il est mal rédigé : $A^2 - I_2 = 0$ et ainsi $(A - I_2)(A + I_2) = 0$ devrait être justifié par $AI_2 = I_2A$.

2) Ce raisonnement n'est pas rigoureux.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices vérifiant $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = I_2$?

Ex 4. On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \quad y'(t) + y^2(t) = e^t$$

Un élève rédige le raisonnement suivant :

> Soit $a \in \mathbb{R}$, on note $g : t \longmapsto ae^t$ une solution de (E)
>
> on a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) + g^2(t) = e^t$ d'où $ae^t + ae^{2t} = e^t$
>
> en prenant $t = 0$ il vient $2a = 1$ donc $g : t \longmapsto \dfrac{1}{2}e^t$

1) Ce raisonnement est rigoureux et correctement rédigé. *(Mais il est inachevé si on veut les solutions de l'équation)*

2) Si il y a une solution de la forme $t \longmapsto ae^t$ alors c'est $g : t \longmapsto \dfrac{1}{2}e^t$

3) Non, nous ne savons pas.

Remarque : La fonction $g : t \longmapsto \dfrac{1}{2}e^t$ n'est pas une solution de (E).

Ex 5. On veut trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Un élève rédige le raisonnement suivant :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

on a alors f' dérivable sur $\mathbb{R}$ *(comme composée de fonctions dérivables)* et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= -f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

f est donc solution de l'équation $y'' + y = 0$, et ainsi :

$$\boxed{\text{il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)}$$

1) Ce raisonnement est rigoureux et correctement rédigé. *(Mais il est inachevé si on veut les solutions de l'équation)*

2) On a montré que :

si f est une solution alors il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.

ou

Les seules fonctions susceptibles d'être solutions sont celles pour lesquelles il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.

3) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
on note $f : x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$, $\quad f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \longmapsto -a\sin(x) + b\cos(x)$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -a\sin(x) + b\cos(x) = a\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -a\sin(x) + b\cos(x) = a\sin(x) + b\cos(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2a\sin(x) = 0 \\ &\iff a = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & b\sin(x) \end{array} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}}$