Feuille Cours_6_4 : Matrices vues comme une application linéaire.

Ex 1 : Déterminer une base du noyau et de l'image des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ex 2 : Déterminer la dimension du noyau et la dimension de l'image des matrices suivantes.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 3 : Déterminer pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ n'est pas de rang 2.

Pour ces valeurs déterminer une base de $\ker(M(a))$.

Ex 4 : Pour quels réels t la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ 2 & 2t & 4 \\ t & t^2 & 2t \end{pmatrix}$ n'est-elle pas de rang maximal ?

Déterminer le rang et une base du noyau pour ces valeurs.

Ex 5 : On considère la matrice dépendant du paramètre k :

$$C(k) = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k \\ 2 & 2k & 2 & 2k \\ 1 & k & k & k^2 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le rang de $C(k)$ selon les valeurs de k.
2) Déterminer la dimension de $\ker(C(k))$ selon les valeurs de k.
3) Donner une base du noyau lorsque celui-ci est non trivial.

Ex 6 : Soit la matrice paramétrée

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 \\ t & t & t \end{pmatrix}.$$

1) Étudier le rang de $F(t)$ selon t.
2) En déduire la dimension du noyau.
3) Décrire l'image pour les valeurs critiques.

Ex 7 : On considère la matrice $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ définie par $b_{ij} = i + j$.

1) Déterminer le rang de B.
2) Déterminer une base de l'image de B.
3) Quelle est la dimension du noyau ?

Ex 8 : On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ strictement triangulaire supérieure, c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, pour tout (i,j) tel que $i \geqslant j$, $a_{i,j} = 0$.

On note $(X_1, ...X_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

1) Que vaut AX_n ?
2) Montrer que pour $\forall k \in [\![1; n-1]\!],\ AX_k \in \text{Vect} < X_1, \dots, X_{k-1} >$
3) En déduire que $\forall k \in [\![1; n]\!],\ \ A^k X_k = 0_{n,1}$
4) En déduire que $A^n = 0_{n\times n}$. *(A est nilpotente d'ordre au plus n)*