Colles de mathématiques - Semaine 11 - du 15/12/25

*La colle commencera par une questions de cours, les démonstrations peuvent être données en exercice.*

- **Applications linéaires.**

  Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme. Espaces isomorphes.

  Notation $\mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{L}(E)$. Notation $f^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

  Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque.

  Propriétés de ces opérations.

  Noyau. Lien avec l'injectivité. Image. Lien avec la surjectivité.

  On montre que le noyau et l'image sont des sous-espaces vectoriels, respectivement de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée.

- **En dimension finie.**

  Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.

  Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.

  Pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

  Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.

  Pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité. *(Contre-exemple en dimension infinie)*

  Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation des endomorphismes bijectifs.

  Tout espace vectoriel de dimension $n$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

  L'application $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ v & \longmapsto & \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(v) \end{array}$ est un isomorphisme.

  Matrice d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, une base ayant été choisie pour chacun d'eux.

  Théorème : $\forall u \in E, \quad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\ \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$

  Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application réciproque d'un isomorphisme.

  Matrice de $f^n$.

  *Les démonstrations ont été faites avec la proposition :*
  *Si on trouve une matrice $A$ vérifiant $\forall u \in E, \quad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = A\ \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$ alors $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = A$*

  Un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, sa matrice, dans une base quelconque, est inversible,

  Matrice vue comme une application linéaire.

  La matrice $M$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est canoniquement associée à $\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$

  Définition du noyau et de l'image d'une matrice.

  Théorème du rang pour une matrice.

  *Nous n'avons pas encore vu le changement de bases et les matrices semblables.*

- **Python.**

  Méthode d'Euler. *Equation du premier ordre d'inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}$. Système différentielle. Equation du second ordre d'inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —