Correction de la feuille Cours_6_4 : Matrices vues comme une application linéaire.

Ex 1 : • Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
X \in \ker M_1 &\iff M_1 X = 0_{3,1} \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \text{... \textit{(Nous savons que la dimension du noyau est 1)}} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} < \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} >
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \ker(M_1)}$$

•

$$\begin{aligned}
\text{Im}(M_1) &= \text{Im} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \text{Im} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \text{Im} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \text{Vect} < \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} >
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Im}(M_1)}$$

− −

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
X \in \ker(M_2) &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right. \\
&\iff x = 0 \text{ et } y = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ker(M_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

• $\mathrm{Im}(M_2) = \mathrm{Vect}\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\text{libre}} \right\rangle$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(M_2)}$$

• Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} X \in \ker(M_3) &\iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+8z=0 \\ x+3y-3z=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=-y-z \\ y=2z \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \ker(M_3)}$$

• $\mathrm{Im}(M_3) = \mathrm{Vect}\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}}_{\text{libre}} \right\rangle$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(M_3)}$$

– –

Pour M_4 utilisons plutôt un raisonnement :

En observant l'espace engendré par les lignes on peut affirmer que le rang de M_4 est 3.

Le théorème du rang nous donne : $\dim(\ker(M_4)) = 1$ et on remarque que $M_4\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \ker(M_4)}$$

Et en faisant des opérations élémentaires sur les colonnes de M_4 il vient :

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(M_4)}$$

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} X \in \ker(M_5) &\iff x+2y+3z=0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \ker(M_5)}$$

Le théorème du rang nous donne que la dimension de $\mathrm{Im}(M_5)$ est 1 et ainsi :

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(M_5)}$$

– –

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$,

$$X \in \ker(M_6) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \ker(M_6)}$$

Le théorème du rang nous donne que la dimension de $\mathrm{Im}(M_6)$ est 2 ; et les deux premières colonnes de la matrice forment une famille libre de deux vecteurs de $\mathrm{Im}(M_6)$ donc

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(M_6)}$$

Ex 2 : *Juste les réponses.*

- $\dim(\ker(M_1)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Im}(M_1)) = 2$
- $\dim(\ker(M_2)) = 0$ et $\dim(\mathrm{Im}(M_2)) = 2$
- $\dim(\ker(M_3)) = 0$ et $\dim(\mathrm{Im}(M_3)) = 3$
- $\dim(\ker(M_4)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Im}(M_4)) = 3$
- $\dim(\ker(M_5)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Im}(M_5)) = 2$
- $\dim(\ker(M_6)) = 3$ et $\dim(\mathrm{Im}(M_6)) = 1$

Ex 3 : • $M(a)$ n'est pas de rang 2 $\iff \det(M(a)) = 0$

$$\text{or} \qquad \det(M(a)) = 0 \iff a \cdot a - 2 \cdot 1 = 0$$
$$\iff a^2 - 2 = 0$$
$$\iff a = \sqrt{2} \text{ ou } a = -\sqrt{2}$$

donc

$$\boxed{\mathrm{rg}(M(a)) \neq 2 \iff a \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \ker(M(a)) \iff M(a)X = 0_{2,1}$$
$$\iff \begin{cases} ax + y = 0 \\ 2x + ay = 0 \end{cases}$$

Cas 1 : $a = \sqrt{2}$.

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,x + y = 0 \\ 2x + \sqrt{2}\,y = 0 \end{cases} \iff y = -\sqrt{2}\,x$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \ker(M(\sqrt{2})).}$$

Cas 2 : $a = -\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} -\sqrt{2}\,x + y = 0 \\ 2x - \sqrt{2}\,y = 0 \end{cases} \iff y = \sqrt{2}\,x$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \ker(M(-\sqrt{2})).}$$

Ex 4 : *(non corrigé)*

Ex 5 : *(non corrigé)*

Ex 6 : *(non corrigé)*

Ex 7 : *Réponse que vous pouvez comprendre si vous avez bien suivi la correction au tableau. Je fais exactement le même raisonnement, seule la présentation change.*

On suppose que $n \geqslant 2$,

1) et 2) En notant C_j la $j^{\text{ième}}$ colonne de B, on remarque $C_j - C_1 = (j-1)U$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

on en déduit que $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Vect} < C_1, U >$,

et comme $n \geqslant 2$, les colonnes C_1 et U sont non proportionnelles et ainsi :

$$\boxed{(C_1, U) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(B)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{rg}(B) = 2}$$

3) Le théorème du rang donne $\boxed{\dim(\ker(B)) = n - 2}$

Ex 8 : *(non corrigé)*