

Correction de la feuille Cours_6_4 : Matrices vues comme une application linéaire.

Ex 1 : • Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} X \in \ker M_1 &\iff M_1 X = 0_{3,1} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \dots \text{ (Nous savons que la dimension du noyau est 1)} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \ker(M_1)$$

•

$$\begin{aligned} \text{Im}(M_1) &= \text{Im} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \text{Im} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \text{Im} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{Vect} \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Im}(M_1)$$

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} X \in \ker(M_2) &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = 0 \text{ et } y = 0 \end{aligned}$$

$$\ker(M_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- $\text{Im}(M_2) = \text{Vect} \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} \right\rangle$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Im}(M_2)$$

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} X \in \ker(M_3) &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 8z = 0 \\ x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y - z \\ y = 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \ker(M_3)$$

- $\text{Im}(M_3) = \text{Vect} \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} \right\rangle$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Im}(M_3)$$

Pour M_4 utilisons plutôt un raisonnement :

En observant l'espace engendré par les lignes on peut affirmer que le rang de M_4 est 3.

Le théorème du rang nous donne : $\dim(\ker(M_4)) = 1$ et on remarque que $M_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \ker(M_4)$$

Et en faisant des opérations élémentaires sur les colonnes de M_4 il vient :

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Im}(M_4)$$

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} X \in \ker(M_5) &\iff x + 2y + 3z = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \ker(M_5)$$

Le théorème du rang nous donne que la dimension de $\text{Im}(M_5)$ est 1 et ainsi :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Im}(M_5)$$

-
- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$,

$$X \in \ker(M_6) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \ker(M_6)$$

Le théorème du rang nous donne que la dimension de $\text{Im}(M_6)$ est 2 ; et les deux premières colonnes de la matrice forment une famille libre de deux vecteurs de $\text{Im}(M_6)$ donc

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Im}(M_6)$$

Ex 2 : *Juste les réponses.*

- $\dim(\ker(M_1)) = 1$ et $\dim(\text{Im}(M_1)) = 2$
- $\dim(\ker(M_2)) = 0$ et $\dim(\text{Im}(M_2)) = 2$
- $\dim(\ker(M_3)) = 0$ et $\dim(\text{Im}(M_3)) = 3$
- $\dim(\ker(M_4)) = 1$ et $\dim(\text{Im}(M_4)) = 3$
- $\dim(\ker(M_5)) = 1$ et $\dim(\text{Im}(M_5)) = 2$
- $\dim(\ker(M_6)) = 3$ et $\dim(\text{Im}(M_6)) = 1$

Ex 3 : • $M(a)$ n'est pas de rang 2 $\iff \det(M(a)) = 0$

$$\begin{aligned} \text{or } \det(M(a)) = 0 &\iff a \cdot a - 2 \cdot 1 = 0 \\ &\iff a^2 - 2 = 0 \\ &\iff a = \sqrt{2} \text{ ou } a = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{rg}(M(a)) \neq 2 \iff a \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in \ker(M(a)) &\iff M(a)X = 0_{2,1} \\ &\iff \begin{cases} ax + y = 0 \\ 2x + ay = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Cas 1 : $a = \sqrt{2}$.

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ 2x + \sqrt{2}y = 0 \end{cases} \iff y = -\sqrt{2}x$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \ker(M(\sqrt{2})).}$$

Cas 2 : $a = -\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ 2x - \sqrt{2}y = 0 \end{cases} \iff y = \sqrt{2}x$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \ker(M(-\sqrt{2})).}$$

Ex 4 : (non corrigé)

Ex 5 : (non corrigé)

Ex 6 : (non corrigé)

Ex 7 : Réponse que vous pouvez comprendre si vous avez bien suivi la correction au tableau.
Je fais exactement le même raisonnement, seule la présentation change.

On suppose que $n \geq 2$,

1) et 2) En notant C_j la $j^{\text{ième}}$ colonne de B , on remarque $C_j - C_1 = (j-1)U$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

on en déduit que $\text{Im}(B) = \text{Vect} \langle C_1, U \rangle$,

et comme $n \geq 2$, les colonnes C_1 et U sont non proportionnelles et ainsi :

$$\boxed{(C_1, U) \text{ est une base de } \text{Im}(B)} \text{ et } \boxed{\text{rg}(B) = 2}$$

3) Le théorème du rang donne $\boxed{\dim(\ker(B)) = n - 2}$

Une autre explication pendant les révisions.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \cdots & n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$C_2 - C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, C_3 - C_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, C_j - C_1 = (j-1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, C_n - C_1 = (n-1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Or $\text{Im}(B) = \text{Vect} \langle C_1, C_2, \dots, C_n \rangle$ donc (opérations élémentaires) $\text{Im}(B) = \text{Vect} \langle C_1, U \rangle$

et comme $n \geq 2$, les colonnes C_1 et U sont non proportionnelles et ainsi :

$$\boxed{\langle C_1, U \rangle \text{ est une base de } \text{Im}(B)} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{rg}(B) = 2}$$

Ex 8 : On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ strictement triangulaire supérieure, c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, pour tout (i, j) tel que $i \geq j$, $a_{i,j} = 0$.

On note (X_1, \dots, X_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

1) AX_1 est la première colonne de A donc $\boxed{AX_1 = 0_{n \times 1}}$

2) Pour $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, AX_k est la k ème colonne de A donc $AX_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k} X_i$ et ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket, AX_k \in \text{Vect} \langle X_1, \dots, X_{k-1} \rangle}$$

3) Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

en utilisant les résultats des questions 1) et 2) on obtient successivement :

$$AX_k \in \text{Vect} \langle X_1, \dots, X_{k-1} \rangle,$$

$$\text{puis } A^2 X_k \in \text{Vect} \langle X_1, \dots, X_{k-2} \rangle$$

...

$$\text{puis } A^{k-1} X_k \in \text{Vect} \langle X_1 \rangle$$

$$\text{En conclusion on a bien } \boxed{\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, A^k X_k = 0_{n,1}}$$

4) $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, A^k X_k = 0_{n,1}$ donc $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, A^n X_k = 0_{n,1}$ (En multipliant à gauche par A^{n-k})

Toutes les colonnes de A^n sont donc nulles et ainsi :

$$\boxed{A^n = 0_{n \times n}}$$