Feuille Cours_6_5 : Changement de base. Matrices semblables.

Ex 1 : Dans les cas suivants donner la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ puis de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$:

1) $\mathscr{B} = ((1,0),(1,1))$ et $\mathscr{B}' = ((1,2),(3,4))$
2) $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathscr{B}' = (1,(X-1),(X-1)^2)$

Ex 2 : 1) a) En revenant à la définition :
déterminer les coordonnées de $(1,2,-1)$ dans la base $\mathscr{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$

b) Avec la formule de changement de base :
déterminer les coordonnées de $(1,2,-1)$ dans la base $\mathscr{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$

2) a) En revenant à la définition :
déterminer les coordonnées de $2+X+3X^2$ dans la base $\mathscr{B} = (1, X-1, (X-1)^2)$

b) Avec la formule de changement de base :
déterminer les coordonnées de $2+X+3X^2$ dans la base $\mathscr{B} = (1, X-1, (X-1)^2)$

Ex 3 : 1) On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}' = (e_1', e_2')$, où $e_1' = (1,2)$ et $e_2' = (1,3)$.

a) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer les matrices de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ et $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

c) On note f_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$,
déterminer la matrice de f_1 dans la base $\mathscr{B}'$.

d) On note f_2 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}'$,
déterminer la matrice de f_2 dans la base $\mathscr{B}$.

2) On note $E = \mathbb{R}_2[X]$, sa base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ et la famille $\mathscr{B}' = (1-2X^2\,,\, 3X^2+X\,,\, 2X^2+X)$.

a) i. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base et donner la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
ii. En déduire la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

b) On note : f l'endomorphisme de E définie par $f(P) = P'$.
i. Donner la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
ii. En déduire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Ex 4 : $(*)$ *Généralisation de la formule de changement de base du cours.*

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_1'$ deux bases de E et $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_2'$ deux bases de F
Donner une formule donnant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1',\mathscr{B}_2'}(f)$ en fonction de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$

Ex 5 : Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et P inversible telles que $M = P^{-1}NP$.

On note $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & NX \end{array}$

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
On note $\mathscr{B}'$ la famille formée des colonnes de la matrice P.

1) Quelle est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$?
2) Justifier que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et déterminer la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}$, quelle est la matrice de f^n dans la base $\mathscr{B}$? quelle est la matrice de f^n dans la base $\mathscr{B}'$?
4) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P^{-1}N^nP$.
5) Retrouver ce résultat avec un raisonnement par récurrence.

Ex 6 : **L'application trace**. *(Classique pas au programme et déja vue)*

On appelle trace l'application qui à toute matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe le réel $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$ $\big($ noté $\operatorname{tr}(M)$ $\big)$.

1) Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

2) En déduire que pour toutes matrices A et B, si A et B sont semblables alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$

Ex 7 : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
Montrer que : M est semblable à λI_n si, et seulement si, $M = \lambda I_n$

Ex 8 : **Définition 1 :** *(Au programme, nous la verrons bientôt.)*
Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable quand elle est semblable à une matrice diagonale.

Définition 2 : *(Pas au programme, nous l'avons déjà vu)*
Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $M^p = 0$.

1) Montrer que la seule matrice nilpotente diagonalisable est la matrice nulle.
2) Montrer que les matrices suivantes ne sont pas diagonalisables :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 9 : *(Une condition nécessaire)*
On note $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Quel est le rang de ces trois matrices ?
2) Montrer que M_1 et M_2 ne sont pas semblables.
3) Montrer que M_2 et M_3 sont semblables.
Indication :
pour $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $M_2 = Mat_{\mathscr{B}}(f)$.
Déterminer une autre base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est M_3

Ex 10 : $(*)$ *Multiplier par une matrice inversible ne change pas le rang d'une matrice. Changer de base ne modifie pas le rang. Composer par un isomorphisme ne modifie pas le rang d'une application linéaire.*
Le but de cet exercice est de justifier ce type de raisonnement.
On admet le résultat suivant : *(Démontré dans la feuille Exo_11)*
Si E, F, G sont des espaces vectoriels de dimension finie, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min\big(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)\big).$$

1) Le but de cette question est de montrer que :

" Multiplier à gauche ou à droite par une matrice inversible ne change pas le rang d'une matrice"

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et P un matrice inversible de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.
a) Justifier que $\operatorname{rg}(AP) \leqslant \operatorname{rg}(A)$.
b) En remarquant que $A = APP^{-1}$ montrer que $\operatorname{rg}(A) \leqslant \operatorname{rg}(AP)$.
c) Conclure.

2) **Applications.**
a) Montrer que deux matrices semblables ont même rang.
b) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire bijective.
Montrer que pour toute famille finie $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E, on a :

$$\operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_n) = \operatorname{rg}\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big).$$

c) Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire bijective et g une application linéaire quelconque de F dans G
Montrer que : $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g)$
d) Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie et $f : F \to G$ une application linéaire bijective et g une application linéaire quelconque de E dans F
Montrer que : $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(g)$