Correction de la feuille Cours_6_5 : Changement de base. Matrices semblables.

Ex 1 : Dans les cas suivants donner la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ puis de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$:

1) $\text{Coord}_{\mathscr{B}}((1,2)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\text{Coord}_{\mathscr{B}}((3,4)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}$

et $P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}^{-1}$ donc $\boxed{P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$

2) *(non corrigé)*

Ex 2 : 1) a) *En revenant à la définition :*

On cherche a, b, c tels que $(1,2,-1) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) \iff \begin{cases} a+b+c &= 1 \\ b+c &= 2 \\ c &= -1 \end{cases}$

donc

$$\boxed{\text{Coord}_{\mathscr{B}}((1,2,-1)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

b) *Avec la formule de changement de base :*

$\text{Coord}_{\mathscr{C}}((1,2,-1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $\text{Coord}_{\mathscr{B}}((1,2,-1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Coord}_{\mathscr{B}}((1,2,-1)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

2) *(non corrigé)*

Ex 3 : *(non corrigé)*

Ex 4 : *(non corrigé) Mais je donne la réponse à ceux qui voudraient essayer*

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}_1',\mathscr{B}_2'}(f) = P_{\mathscr{B}_2'\mathscr{B}_2}\text{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)P_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_1'}$$

Ex 5 : 1) $\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est } N}$

2) $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ est inversible.
or $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = P$ qui est inversible donc

$$\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

La formule de changement de base donne : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}NP$ donc

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = M}$$

3) *(Propriété des matrices d'endomorphismes)*

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) = N^n \text{ et } \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n) = M^n}$$

4) La formule de changement de base donne : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n) = P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}\,\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n)P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P^{-1}N^nP}$$

5) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{M^n = P^{-1}N^nP}_{\text{notée } \mathcal{R}(n)}$

- Pour $n = 0$,
  d'une part $M^0 = I_n$ et d'autre part $PN^0P^{-1} = P^{-1}I_nP = P^{-1}P = I_n$

  on a bien $\mathcal{R}(0)$ vraie

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{R}(n)$ est vraie,

$$\begin{array}{rcll} M^{n+1} & = & M^n \times M & \\ & = & P^{-1}N^nP \times M & \textit{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ & = & P^{-1}N^nP \times P^{-1}NP & \textit{(d'après la donnée de l'énoncé)} \\ & = & P^{-1}N^nI_nNP & \\ & = & P^{-1}N^{n+1}P & \textit{ce qui donne } \mathcal{R}(n+1) \end{array}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad M^n = P^{-1}N^nP}$$

Ex 6 : 1) Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{tr}(AB) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(AB)_{i,i} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(A)_{i,k}(B)_{k,i}\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(B)_{k,i}(A)_{i,k}\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(B)_{k,i}(A)_{i,k}\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(BA)_{k,k} \\ & = & \operatorname{tr}(BA) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour toutes matrices } A \text{ et } B \text{ de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)}$$

2) On suppose que pour une matrice P inversible $A = P^{-1}BP$, (*on suppose que A et B sont semblables*)

$$\begin{array}{rcll} \operatorname{tr}(A) & = & \operatorname{tr}((P^{-1}B)P) & \\ & = & \operatorname{tr}(PP^{-1}B) & \textit{d'après 1)} \\ & = & \operatorname{tr}(I_nB) & \\ & = & \operatorname{tr}(B) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Deux matrices semblables ont la même trace.}}$$

Ex 7 :

$$\begin{array}{rcl} M \text{ est semblable à } \lambda I_n & \iff & \exists P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\,\textit{(inversible)} : \ M = P^{-1}(\lambda I_n)P \\ & \iff & \exists P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\,\textit{(inversible)} : \ M = \lambda P^{-1}I_nP \\ & \iff & \exists P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\,\textit{(inversible)} : \ M = \lambda P^{-1}P \\ & \iff & M = \lambda I_n \end{array}$$

Ex 8 : *(non corrigé)*

Ex 9 : 1) Les trois matrices ont une unique colonne non nulle donc

$$\boxed{\text{Les trois matrices sont de rang 1}}$$

2) Raisonnons par l'absurde en supposant que $M_1 = P^{-1}M_2P$ pour P une matrice inversible.

on aurait alors ${M_1}^2 = P^{-1}{M_2}^2P$, mais ${M_1}^2 = M_1$ ($\neq 0$) et ${M_2}^2 = 0$,

donc ${M_1}^2 \neq P^{-1}{M_2}^2P$, ce qui est impossible,

donc

$$\boxed{\text{Les matrices } M_1 \text{ et } M_2 \text{ ne sont pas semblables.}}$$

En classe on a fait autrement :

Raisonnons par l'absurde en supposant que $M_1 = P^{-1}M_2P$ pour $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ inversible.

on a alors : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

ce qui entraîne : $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ \boxed{a_{21}} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis, $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

la matrice P aurait alors une ligne nulle ce qui est impossible car P est inversible.

$$\boxed{M_1 \text{ et } M_2 \text{ ne sont pas semblables}}$$

3) Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $M_2 = Mat_{\mathscr{B}}(f)$.
on a $f(e_1) = 0_E$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = 0_E$
En prenant : $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_3, e_2)$, $f(e_1') = 0_E$, $f(e_2') = 0_E$ et $f(e_3') = e_1'$ donc $M_3 = Mat_{\mathscr{B}'}(f)$

M_2 et M_3 représentent le même endomorphisme dans deux bases donc

$$\boxed{\text{Les matrices } M_2 \text{ et } M_3 \text{ sont semblables.}}$$

Ex 10 : 1) a) On note $f : X \mapsto PX$ et $g : X \mapsto AX$, on a alors $g \circ f : X \mapsto APX$

sachant qu'on a admis que $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{rg}(f)$ il vient $\boxed{\text{rg}(AP) \leqslant \text{rg}(A)}$

b) P est inversible donc $A = APP^{-1} = (AP)P^{-1}$ et en raisonnant comme en a) il vient $\boxed{\text{rg}(A) \leqslant \text{rg}(AP)}$

c) En résumé de a) et b) on obtient $\text{rg}(A) = \text{rg}(AP)$,

de plus en remarquant que $\text{rg}(PA) = \text{rg}(A^TP^T)$ on montre aussi que $\text{rg}(A) = \text{rg}(PA)$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Multiplier par une matrice inversible ne change pas le rang d'une matrice.}}$$

2) a) On suppose que pour une matrice P inversible $A = P^{-1}BP$, (*on suppose que A et B sont semblables*)

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg}(P^{-1}BP) \\ &= \text{rg}(BP) \qquad \textit{d'après 1)} \\ &= \text{rg}(B) \qquad \textit{d'après 1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Deux matrices semblables ont même rang}}$$

Remarque : on peut démontrer ce résultat avec la caractérisation :

$$\text{rg}(A) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \text{rg}(f) = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \text{rg}(B)$$