Feuille Exo_12 : Etude d'un problème.

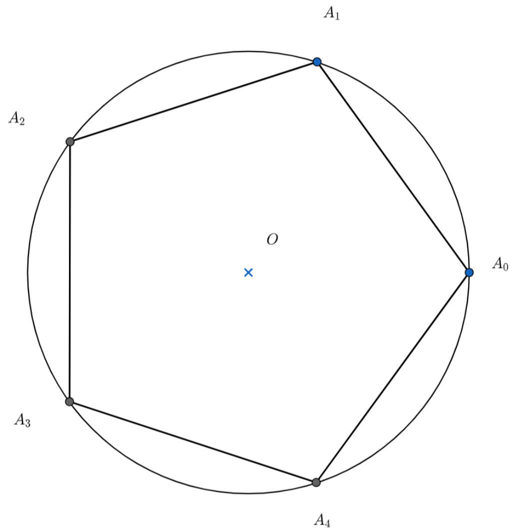
Ce problème est constitué de trois parties. Dans la partie I, on démontre des résultats qui pourront être utilisés dans la partie II. La partie III est indépendante des deux autres.

Dans la suite p est un entier naturel supérieur ou égal à 3 .

On considère un repère orthonormal du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et le cercle unité $\mathcal{C}$ sur lequel on place dans le sens trigonométrique p points équidistants $A_0, \ldots, A_{p-1}$ tels que A_0 soit d'affixe 1.

Ainsi pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\quad A_k$ est le point d'affixe $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$.

Pour $p = 5$, on a la représentation suivante :



I. Résultats préliminaires

1) On considère la matrice $\quad D_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

   a. Inverser les matrices D_3 et D_4.

   b. Prouver que la matrice D_p est inversible et donner son inverse.
   On pourra utiliser les résultats de la question précédente pour conjecturer l'inverse de D_p.

2) Soit $f : \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k$.

   a. Prouver que f est une application $\mathbb{C}$-linéaire.

   b. La fonction f est-elle injective ?

   c. La fonction f est-elle surjective ?

   d. Déterminer la dimension du noyau de f.

3) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} z_k$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4) Soit z un complexe non nul. Prouver que : $z^p = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \quad z = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$.

On pourra mettre z sous forme exponentielle ou trigonométrique.

On admettra que l'équation $z^p = 1$ possède p solutions distinctes : $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$.

II. Étude d'un modèle de diffusion sur le cercle.

On considère l'expérience suivante : une particule est libre de se déplacer parmi les p points $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$. Initialement la particule se situe sur le point A_0 et, à chaque étape, on choisit de façon équiprobable de la déplacer vers l'un de ses deux plus proches voisins.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n la variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![0, p-1]\!]$ et telle que l'emplacement occupé à l'étape n soit A_{U_n}.
La variable aléatoire U_0 est donc constante à 0 et la variable aléatoire U_1 est égale à 1 avec une probabilité 1/2 et à $p-1$ avec une probabilité 1/2.
La variable U_2 est à valeurs dans $\{2, 0, p-2\}$ et $\mathbb{P}(U_2 = 2) = \mathbb{P}(U_2 = p-2) = 1/4$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(U_n = 0) \\ \mathbb{P}(U_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(U_n = p-1) \end{pmatrix}$.

1) Déterminer une matrice $M_p \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier n, on ait

$$X_{n+1} = M_p X_n.$$

Indication : une récurrence n'est pas nécessaire.

2) Soit n un entier. Donner sans justification l'expression de X_n en fonction de la matrice M_p et de n.

3) Vérifier que $M_p = \frac{1}{2}\left(D_p + D_p^{-1}\right)$.

4) On suppose ici que $p = 3$ et on admet que $M_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on note $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   a. Calculer $M_3 P$ et montrer que P est inversible.
   b. Remarquer que pour une matrice Δ diagonale $M_3 P = P\Delta$. On donnera cette matrice Δ.
   c. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad M_3^n = P\Delta^n P^{-1}$
   d. Déterminer P^{-1}.
   e. Soit $k \in [\![0, 2]\!]$. Déterminer la limite de $\mathbb{P}(U_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
      Interprétez le résultat obtenu.

5) On note Q la matrice suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \ddots & & & z_{p-1} \\ z_0^2 & z_1^2 & \ddots & \ddots & & z_{p-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & z_{p-1}^{p-2} \\ z_0^{p-1} & z_1^{p-1} & \cdots & \cdots & z_{p-2}^{p-1} & z_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Question Bonus : Montrer que Q est inversible.

6) Remarquer que pour une matrice Δ_p diagonale $D_p Q = Q\Delta_p$. On donnera cette matrice Δ_p.

7) En déduire, en utilisant la question II)3) ,

$$M_p = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cos\left(\frac{2(p-1)\pi}{p}\right) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Dans toute la suite du sujet que p est impair. Il existe donc un entier q tel que $p = 2q+1$

8) Déterminer pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \cos(2k\pi/p)^n$.

9) En déduire, pour tout $\ell \in [\![0, p-1]\!]$, la limite de $\mathbb{P}(U_n = \ell)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
On utilisera la relation obtenue à la question II. 3)

10) Interprétez le résultat obtenu.

III. Étude d'une variable aléatoire

1) On considère la fonction cotan qui à un réel x associe $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

   a. Déterminer l'ensemble de définition D de cotan.

   b. En remarquant que pour tout $x \in D$, on a $\operatorname{cotan}(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, tracer, sans justification, son graphe sur $[-2\pi, 2\pi] \cap D$.

Pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$,

on note B_k le point d'intersection de la droite (A_0A_k) avec la droite d'équation $x = -1$.

2) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$, montrer que l'ordonnée de B_k est $2\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{p}\right)$.

On considère une variable W_p suivant une loi uniforme sur $[\![1, p-1]\!]$ et on s'intéresse à la variable aléatoire

$$Z_p = 2\operatorname{cotan}\left(\frac{W_p\pi}{p}\right)$$

3) Calculer l'espérance de Z_3 et l'espérance de $|Z_3|$.

4) Déterminer l'espérance de Z_p.
On pourra utiliser que pour tout $x \in D$, on a $\operatorname{cotan}(x) = -\operatorname{cotan}(\pi - x)$.

On s'intéresse à la somme $S_p = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{p}\right) \cdot$ On rappelle que $p = 2q+1$.

5) Exprimer $E(|Z_p|)$ en fonction de S_p et de p.

6) **(Pour les 5/2)** La fonction cotangente est-elle intégrable sur $]0, \pi/2]$?

7) Soit $k \in [\![1, q]\!]$. En utilisant la monotonie de la fonction cotan sur $]0, \pi[$, montrer que l'on a :

$$\frac{\pi}{p}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{p}\right) \geqslant \int_{k\pi/p}^{(k+1)\pi/p} \operatorname{cotan}(t)\mathrm{d}t.$$

8) En déduire que :

$$S_p \geqslant \frac{1}{\pi}\left(\ln\left(\sin\left(\frac{(q+1)\pi}{p}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)\right).$$

9) Déterminer la limite de S_p puis celle de $E(|Z_p|)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

10) Donner un équivalent de $\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

11) Donner un équivalent de $E(|Z_p|)$ lorsque p tend vers $+\infty$.
On pourra s'inspirer des questions précédentes pour encadrer $E(|Z_p|)$.

FIN DU SUJET