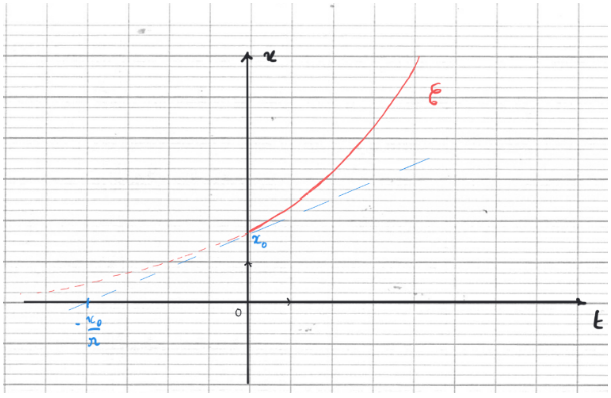
Correction du Devoir maison 4.

1.(a) *(Equation différentielle linéaire du premier ordre, homogène à coefficients constants.*
La solution de ce problème différentiel est de la forme $x : t \longmapsto ce^{rt}$ avec c un réel à déterminer et la condition initiale $x(0) = x_0$ permet de conclure :

$$\boxed{\text{La solution de (1) est la fonction } x : t \longmapsto x_0 e^{rt}}$$

(b) *(Ne pas négliger cette question qui évalue la compétence "représenter")*



(c) *(Interprétation d'un modèle, à vous de réfléchir ...)*
Le nombre de lièvres ne cesse de croître *(une croissance exponentielle)*.
Ce modèle est surement acceptable quand le nombre de lièvres est petit (en fonction de l'environnement) ; mais à partir d'un certain moment il n'est plus raisonnable, la nourriture risque de manquer, l'espace de vie va devenir insuffisant ...

2.(a) *(Compréhension et interprétation d'un modèle)*
Tant que $x(t)$ est négligeable devant K, on peut faire l'approximation $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \approx rx$ et on revient au modèle de la première question et alors $\boxed{\text{l'allure de la solution est celle donnée dans la question 1. (b).}}$

(b) *(Déterminer le signe d'une expression)*
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{rx}{K}(K - x)$, on en déduit le tableau de signe de $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $x \geqslant 0$.

x	0		K		$+\infty$
$\dfrac{dx}{dt}$	0	$+$	0	$-$	

(c) x est une fonction continue donc avant de s'annuler la fonction prendrait une valeur dans l'intervalle $[0, K]$, mais alors $\dfrac{dx}{dt} \geqslant 0$ et ainsi x serait croissante. x ne peut pas s'annuler en étant toujours croissante.

$$\boxed{\text{Pour tout } t > 0, \quad x(t) \neq 0}$$

– –

Une autre réponse ***(pas dans l'esprit du sujet mais efficace sur cette question très classique)*** **:**

x est la solution d'une équation différentielle de la forme : $\dfrac{dx}{dt} = a(t)x$ où $a : t \mapsto r\left(1 - \dfrac{x(t)}{K}\right)$
donc il existe un réel c et une fonction A pour lesquels $\forall t > 0, \quad x(t) = c\exp(-A(t))$
et comme $x(0) \neq 0$ on en déduit bien :

$$\boxed{\text{Pour tout } t > 0, \quad x(t) \neq 0}$$

– –

(d) *(Calcul de la dérivée d'une fonction composée)*

x est dérivable et ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$ donc z est dérivable sur $[0;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt}(t) &= \left(-\frac{1}{x^2(t)}\right)\frac{dx}{dt}(t) \\
&= \left(-\frac{1}{x^2(t)}\right)\left(rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)\right) \\
&= -\frac{r}{x(t)}+\frac{r}{K}
\end{aligned}$$

et comme $z(t)=\dfrac{1}{x(t)}$ on obtient bien :

$$\boxed{\frac{dz}{dr}=\frac{r}{K}-rz}$$

(e) *(Equation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants).*

La solution de cxe problème différentiel est de la forme $z : t \longmapsto ce^{-rt}+\dfrac{1}{K}$ avec c un réel à déterminer et la condition initiale $z(0)=z_0$ permet de conclure :

$$\boxed{z : t \longmapsto \left(z_0-\frac{1}{K}\right)e^{-rt}+\frac{1}{K}}$$

(f) *(Manipuler et exploiter des expressions symboliques).*

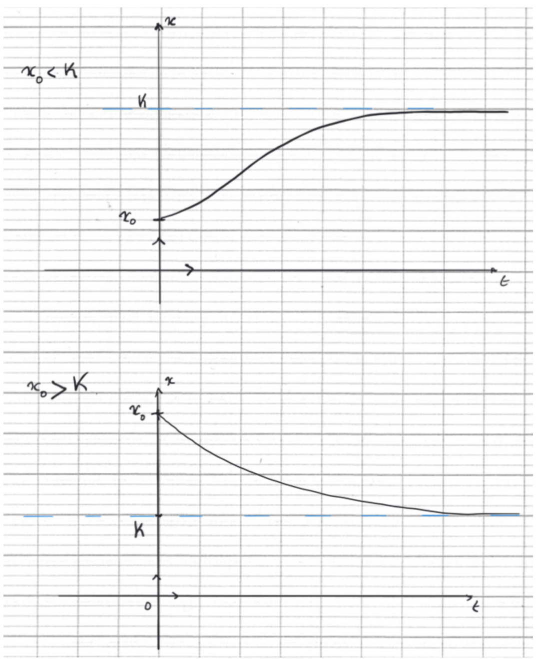
$z(t)=\dfrac{1}{x(t)}$ et $z_0=\dfrac{1}{x_0}$ donc

$$\boxed{x(t)=\frac{Kx_0}{(K-x_0)e^{-rt}+x_0}}$$

(g) *(calcul de limite. Argumenter)*

On sait que $r>0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-rt}=0$ et ainsi $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=K}$

(h) *(Ne pas négliger cette question qui évalue la compétence "représenter")*



(i) *(Interprétation d'un modèle)*

Dans le modèle (1) on considère que les ressources du milieu sont infinies et alors le nombre de lièvre croit exponentiellement.

Dans le modèle (2) *(équation logistique)*, en tenant compte de ressources limitées du milieu le nombre de lièvres tend vers une constante.

K est l'effectif de la population de lièvres en situation d'équilibre. Capacité de charge du milieu.

3. *(Interprétation d'un modèle)*

(a) S'il n'y a pas de lynx on retrouve le modèle de la question 1) et le nombre de lièvres croit de manière exponentielle.

(b) S'il n'y a pas de lièvre, le nombre de lynx vérifie $\dfrac{dy}{dt} = -my$ donc $\boxed{\forall t > 0, \quad y(t) = y_0 e^{-mt}}$

Le nombre de lynx décroit de manière exponentielle.

4. *(Dérivée d'une composée. Changement de variable.)*

$\bar{x}(s) = \dfrac{q}{r}x(t)$ et $s = rt$ donc $\bar{x}(s) = \dfrac{q}{r}x\left(\dfrac{s}{r}\right)$ ce qui entraine : $\dfrac{d\bar{x}}{ds}(s) = \dfrac{q}{r^2}\dfrac{dx}{dt}\left(\dfrac{s}{r}\right)$

$\bar{y}(s) = \dfrac{p}{r}y(t)$ et $s = rt$ donc $\bar{y}(s) = \dfrac{p}{r}y\left(\dfrac{s}{r}\right)$ ce qui entraine : $\dfrac{d\bar{y}}{ds}(s) = \dfrac{p}{r^2}\dfrac{dx}{dt}\left(\dfrac{s}{r}\right)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & rx - pxy \\ \dfrac{dy}{dt} & = & -my - qxy \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{q}{r^2}\dfrac{dx}{dt} & = & \dfrac{qx}{r} - \dfrac{pqxy}{r^2} \\ \dfrac{p}{r^2}\dfrac{dy}{dt} & = & -\dfrac{mpy}{r^2} + \dfrac{pqxy}{r^2} \end{array}\right.$$

en posant $\boxed{a = \dfrac{m}{r}}$ on obtient bien : $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d\bar{x}}{ds} & = & \bar{x} - \bar{x}\bar{y} \\ \dfrac{d\bar{y}}{ds} & = & -a\bar{y} + \bar{x}\bar{y} \end{array}\right.}$

5.(a) *(Résolution d'un système. (ici non linaire).)*

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - xy & = & 0 \\ -ay + xy & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x - xy & = & 0 \\ x - ay & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} ay - ay^2 & = & 0 \\ x & = & ay \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y(1-y) & = & 0 \\ x & = & ay \end{array}\right. \quad \text{car } a \neq 0$$

$$\iff (\ y = 0 \text{ et } x = 0) \quad \text{ou} \quad (y = 1 \text{ et } x = a)$$

$\boxed{\text{Les points d'équilibre sont } (0,0) \text{ et } (a,1)}$

(b) *(Interprétation d'un modèle)*

Ces deux points d'équilibre représentent des situations où pendant un petit intervalle de temps le nombre de lièvres et le nombre de lynx n'évolue pas.

(c) *(Interprétation d'un modèle)*

$(0,0)$ est la situation où les lièvre et les lynx ont disparu.

$(1,a)$ il y a un équilibre entre la croissance des lièvres et la prédation de lynx.

6. *(Etude d'une fonction)*

(a) f_c est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall u > 0, \quad f_c'(u) = 1 - \dfrac{c}{u} = \dfrac{u-c}{u}$

on peut alors dresser le tableau de variations de f_c :

u	0		c		$+\infty$
$f'(u)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f_c(c)$	$\nearrow$	$+\infty$

Limites de $f_c(u) = u - c\ln(u)$ *(pas demandées ici)*

- En 0 : $\lim\limits_{u\to 0} \ln(u) = -\infty$ donc $\lim\limits_{u\to 0} f_c(u) = +\infty$
- En $+\infty$: $f_c(u) = u\left(1 - c\,\dfrac{\ln(u)}{u}\right)$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln(u)}{u} = 0$ *(croissance comparée)* donc $\lim\limits_{u\to+\infty} f_c(u) = +\infty$

Cette étude montre que f_c admet un minimum en c et $f_c(c) = c(1-\ln(c))$ donc

$$\boxed{\forall u > 0, \quad f_c(u) \geqslant c(1-\ln(c))}$$

(b) • f_c est strictement décroissante sur $]0,c]$ donc $\forall u \in]0,c[, \qquad f_c(u) \neq f_c(c)$

• f_c est strictement croissante sur $[c;+\infty[$ donc $\forall u \in]c;+\infty[, \qquad f_c(u) \neq f_c(c)$

• pour $u = c, \quad f_u(c) = c(1-\ln(c))$

donc

$$\boxed{f_c(u) = c(1-\ln(c)) \text{ si, et seulement si, } u = c}$$

(c) f_c est continue sur $]0,c]$ et $M \in \left[f_c(c)\,;\lim\limits_{0} f_c\right[$ donc il existe $b \in]0,c]$ tel que $f_c(b) = M$

de même f_c est continue sur $[c;+\infty[$ et $M \in \left[f_c(c)\,;\lim\limits_{+\infty} f_c\right[$ donc il existe $B \in [c;+\infty[$ tel que $f_c(B) = M$

On en déduit :

u	0		b		c		B		$+\infty$
$f'(u)$		$-$			0		$+$		
f	$+\infty$	$\searrow$	M	$\searrow$	$f_c(c)$	$\nearrow$	M	$\nearrow$	$+\infty$

et ainsi pour ces deux nombres b et B on a : $0 \leqslant b \leqslant B$ et

$$\boxed{f_c(u) \leqslant M \text{ si, et seulement si, } b \leqslant u \leqslant B}$$

7. On remarque que : $V(x,y) = f_a(x) + f_1(y)$

(a) i. On remarque que : $V(x,y) = f_a(x) + f_1(y)$ donc (en utilisant 6.(a)) on obtient :

$$V(x,y) \geqslant f_a(x) + f_1(1) \quad \text{et} \quad V(x,y) \geqslant f_a(a) + f_1(y)$$

on a bien pour tout $s \geqslant 0$,

$$\boxed{f_a(x(s)) \leqslant V(x(s),y(s)) - 1 \text{ et } f_1(y(s)) \leqslant V(x(s),y(s)) - a(1-\ln(a))}$$

ii. On note $g : s \longmapsto V(x(s),y(s)) \;=\; x(s) - a\ln(x(s)) + y(s) - \ln(y(s))$

g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $g'(s) = x'(s) - a\dfrac{x'(s)}{x(s)} + y'(s) - \dfrac{y'(s)}{y(s)}$

En utilisant (5) il vient :

$$\begin{aligned} g'(s) &= (x(s) - x(s)y(s)) \times \left(1 - \frac{a}{x(s)}\right) + (-ay(s) + x(s)y(s)) \times \left(1 - \frac{1}{y(s)}\right) \\ &= x(s) - x(s)y(s) - a + ay(s) - ay(s) + x(s)y(s) + a - x(s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

g est dérivable sur un intervalle et sa dérivée est nulle donc g est constante.

$$\boxed{V(x(s),y(s)) \text{ reste constante pour tout } s \geqslant 0}$$

iii. En prenant $M = V(x(s),y(s)) - 1$, on sait que $V(x(s),y(s)) - 1 \geqslant f_a(x(s)) \geqslant a(1-\ln(a))$

donc *(question 6. (c))* il existe b_x et B_x vérifiant $0 \leqslant bx \leqslant Bx$ et tels que :

$$f_a(u) \leqslant M \text{ si, et seulement si, } b_x \leqslant u \leqslant B_x$$

et comme $f_a(x(s)) \leqslant M$, on a bien

$$\boxed{b_x \leqslant x(s) \leqslant B_x}$$

On raisonne de même en posant $M = V(x(s), y(s)) - a(1 - \ln(a))$ pour monter qu'il existe b_y et B_y vérifiant $0 \leqslant by \leqslant By$ et tels que :

$$\boxed{b_y \leqslant y(s) \leqslant B_y}$$

(b)

$$\begin{array}{rcll} V(x,y) & = & f_a(x) + f_1(y) & \\ & \geqslant & f_a(a) + f_1(1) & \text{d'après 6. (a)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad V(x,y) \geqslant a\,(1 - \ln(a)) + 1}$$

$$\begin{array}{rcll} V(x,y) = a(1-\ln(a)) + 1 & \iff & (f_a(x) - f_a(a)) + (f_1(y) - f_1(1)) = 0 & \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{l} f_a(x) - f_a(a) = 0 \\ f_1(y) - f_1(1) = 0 \end{array} \right. & \text{car} \quad f_a(x) - f_a(a) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f_1(y) - f_1(1) \geqslant 0 \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{l} x = a \\ y = 1 \end{array} \right. & \text{d'après 6. (b)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad V(x,y) = a\,(1 - \ln(a)) + 1 \iff (x,y) = (a,1)}$$

(c) i. Pour tout $s \geqslant 0$, $\quad 0 < b_x \leqslant x(s) \leqslant B_x \quad$ et $\quad 0 < b_y \leqslant y(s) \leqslant B_y$ donc

$$\boxed{\text{Les populations ne peuvent pas s'éteindre et ne peuvent pas devenir arbitrairement grandes}}$$

ii. Si $(x(0), y(0)) = (a, 1)$ alors l'effectif des deux populations est constant.
En revanche si on part d'une autre situation on n'atteindra jamais ce point d'équilibre, car $V(x(s), y(s))$ est constant.

$$\boxed{\text{Les deux populations ne s'arrêteront jamais d'évoluer.}}$$

iii. *(Interprétation d'un modèle.)*
L'effectif des deux populations restent bornées et strictement positives.
Si on n'est pas au point d'équilibre elles évoluent constamment.

Remarque du correcteur : On pourrait montrer que ces effectifs décrivent une courbe fermée, mais nous ne l'avons pas mis en évidence ici

8. Pour $k \in \mathbb{N}$,
On remarque que :

$$x_{k+1} - x_k = h(x_k - x_k y_k)\ , \quad y_{k+1} - y_k = h(-a y_k + x_k y_k)$$

et

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = 1 + h(1 - y_k)\ , \quad \frac{y_{k+1}}{y_k} = 1 + h(-a + x_k)$$

$$\begin{array}{rcl} v_{k+1} - v_k & = & x_{k+1} - a\ln(x_{k+1}) + y_{k+1} - \ln(y_{k+1}) - \Big(x_k - a\ln(x_k) + y_k - \ln(y_k)\Big) \\ & = & h(x_k - x_k y_k) - a\ln(1 + h(1 - y_k)) + h(-a y_k + x_k y_k) - \ln(1 + h(-a + x_k)) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad v_{k+1} - v_k = h(x_k - a y_k) - a\ln(1 + h(1 - y_k)) - \ln(1 + h(-a + x_k))}$$

9.(a) Or on sait que : $\forall x > -1, \quad x - \ln(1+x) \geqslant 0$ *(Concavité de la fonction logarithme népérien)*
donc

$$\begin{array}{rcl} v_{k+1} - v_k & = & h(x_k - a y_k) - a\ln(1 + h(1 - y_k)) - \ln(1 + h(-a + x_k)) \\ & \geqslant & h(x_k - a y_k) - a h(1 - y_k) - h(-a + x_k) \\ & \geqslant & 0 \qquad \textit{(magique ?)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad v_{k+1} - v_k \geqslant 0}$$

(b) *(A cette question je n'ai pas trouvé plus simple)*

On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad v_{k+1} - v_k = \varphi(h(-a+x_k)) + a\varphi(h(1-y_k))$ en posant $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$, $v_{k+1} - v_k$ est ainsi la somme de deux termes positifs donc

$$v_{k+1} - v_k = 0 \iff \varphi(h(-a+x_k)) = 0 \ \text{ et } \ \varphi(h(1-y_k)) = 0$$

On sait aussi que : $\forall x > -1, \quad \varphi(x) = 0 \iff x = 0$ *(Stricte concavité de la fonction logarithme népérien)*

donc $v_{k+1} - v_k = 0 \iff x_k = a$ et $y_k = 1$ et ainsi on a bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ v_{k+1} - v_k = 0 \quad \text{si, et seulement si, la suite } (x_k, y_k) \text{ est constante.}}$$

10. Nous avons dans la partie 2. que les populations n'arrêteront pas d'évoluer et que pour tout $s \geqslant 0$, $\quad V(x(s), y(s))$ reste constante.

Cette propriété n'est plus vérifiée quand on discrétise le problème par la méthode d'Euler,

$$\boxed{\text{La méthode d'Euler n'est pas satisfaisante pour l'étude de ce modèle.}}$$

11. (a) `import math as m`

(b) `liste(1, 0.2)` renvoie la liste `[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]`

`liste(1, 0.3)` renvoie la liste `[0, 0.3, 0.6, 0.9]`

De façon générale dans la fonction on part de la liste L=[0] et on lui ajoute les flottants h, $2h$, ... , nh tels que nh est le dernier multiple de h inférieure ou égale à T.

Autrement dit : elle renvoie `[0, h, 2h, ..., nh]` avec $\quad n = \left\lfloor \dfrac{T}{h} \right\rfloor \quad$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x.

(c) `Lt` contient les nombres $\left\{ \dfrac{k}{100} \mid k \in [\![0, 2000]\!] \right\}$ et `Ls` contient les nombres $\left\{ \exp\left(\frac{kr}{100}\right) \mid k \in [\![0, 2000]\!] \right\}$

$$\boxed{\text{La fonction } \texttt{mystere} \text{ permet de tracer la fonction } t \longmapsto e^{rt} \text{ sur l'intervalle } [0, 20]}$$

12. (a) i. `L[1]` vaut `[7]`

ii. `L[0][1]` vaut `1`

iii. `len(L)` vaut `3`

iv. après l'instruction `L.append(9.75)`, `len(L)` vaut `[[3, 1], [7], [1, 9, 8, 0], 9.75]`

(b)
```
def lapin(x, y):
    return x - x*y

def lynx(x, y):
    return -a*y + x*y
```

(c)
```
def resol_1(x0 , y0 , T, h):
    x, y = x0, y0
    t = 0
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    Lt = [t]
    while t+h <= T:
        t += h
        Lt.append(t)
        x, y = x + h*lapin(x,y), y + h*lynx(x, y)
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
    return [Lt , Lx , Ly]
```

lignes à écrire sur la copie

Pour ceux qui ne connaissent pas l'affectation simultanée :

```
        t += h
        Lt.append(t)
        aux = x + h*lapin(x,y)
        y = y + h*lynx(x, y)
        x = aux
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
```

(d) • La première ligne affecte à la variable L une liste contenant trois listes :
L[0] contenant les nombres $\{kh \mid k \in [\![0, 2000]\!]\}$
L[1] contenant les nombres $\{x_k \mid k \in [\![0, 2000]\!]\}$
L[2] contenant les nombres $\{y_k \mid k \in [\![0, 2000]\!]\}$

• La ligne `plt.plot(L[0], L[1])` trace la courbe du nombre de lièvres en fonction du temps.

• La ligne `plt.plot(L[0], L[2])` trace la courbe du nombre de lynx en fonction du temps.

(e) `x0 = 1` et `y0 = 0.5` permettent de distinguer les deux courbes.
La courbe en pointillé représente le nombre de lynx *(à un coefficient multiplicatif près)* en fonction du temps.
L'autre courbe représente le nombre de lièvres *(à un coefficient multiplicatif près)* en fonction du temps.

(f) Dans la fonction suivante Lv contient les nombres $\{v_k \mid k \in [\![0, 2000]\!]\}$

```
def trace_v_1 ():
    L = resol_1(x0 , y0 , T, h)
    Lv = []
    for k in range(len(L[1])):
        v = fonctionV( L[1][k], L[2][k] )
        Lv.append(v)
    plt.plot(L[0], Lv)
    plt.show ()
```

13.(a)
```
def resol_2(x0 , y0 , T, h):
    x, y = x0, y0
    u, w = x + h*lapin(x,y), y + h*lynx(x, y)
    t = 0
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    Lt = [t]
    while t+h <= T:
        t += h
        Lt.append(t)
        u = x + h*lapin(x,y)
        w = y + h*( -a*y + x*y )      # ici il y avait une erreur d'énoncé
        aux_x = x + h/2*lapin(x,y)+h/2*lapin(u, w)
        y = y + h/2*lynx(x,y)+h/2*lynx(u, w)
        x = aux_x
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
    return [Lt , Lx , Ly]
```

(b) Il suffit de changer la ligne `L = resol_1(x0 , y0 , T, h)` par `L = resol_2(x0 , y0 , T, h)`

(c) On a montré dans la partie 2) que la suite (v_k) doit être constante ce qui n'est pas vérifié avec la méthode d'Euler, en revanche avec la méthode de Heun on constate que la suite est quasi-constante.

14. *(Note du correcteur : On pourrait faire un cours complet sur le thème de cette question !!)*
On constate que la méthode d'Euler entraine une divergence de la solution numérique, ici on l'observe avec la croissance de la fonction V.
La méthode de Heun semble améliorer cette méthode numérique car la fonction V reste (presque) constante.
En BCPST on observe ce même phénomène en utilisant la fonction `odeint` pour étudier les oscillations du pendule simple en physique. *(Pour ceux qui sont allés jusque là vous pouvez aller voir la feuille d'info 14 que noujs n'avons pas eu le temps de faire en classe)*

15. *(Interprétation d'un modèle)*
L'effectifs des deux populations présentent des oscillations périodiques. Le nombres de lièvres augmente en premier, ce qui fait croitre le nombre de Lynx. Le taux de prédation devient trop grand cela fait chuter le nombre de lièvre ce qui fait chuter à son tour le nombre de lynx.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m

plt.close(’all’)
a = 2
x0 = 1
y0 = 0.5
T = 20
h = 0.01

def lapin(x, y):
    return x - x*y

def lynx(x, y):
    return -a*y + x*y

def resol_1(x0 , y0 , T, h):
    x, y = x0, y0
    t = 0
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    Lt = [t]
    while t+h <= T:
        t += h
        Lt.append(t)
        x, y = x + h*lapin(x,y), y + h*lynx(x, y)
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
    return [Lt , Lx , Ly]

def resol_2(x0 , y0 , T, h):
    x, y = x0, y0
    t = 0
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    Lt = [t]
    while t+h <= T:
        t += h
        Lt.append(t)
        u = x + h*lapin(x,y)
        w = y + h*( -a*y + x*y )      # ici il y avait une erreur d’énoncé dans le sujet original
        aux_x = x + h/2*lapin(x,y)+h/2*lapin(u, w)
        y = y + h/2*lynx(x,y)+h/2*lynx(u, w)
        x = aux_x
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
    return [Lt , Lx , Ly]

def trace_phase_1():
    L = resol_1(x0 , y0 , T, h)
    plt.plot(L[1], L[2])
    plt.title("Avec la méthode d’Euler")
    plt.show()

def trace_phase_2():
    L = resol_2(x0 , y0 , T, h)
    plt.plot(L[1], L[2])
    plt.title("Avec la méthode de Heun")
    plt.show()

plt.figure(’Figure 4 : Prédateurs en fonction des Proies’, figsize = (10,3))
plt.subplot(121)
trace_phase_1()
plt.subplot(122)
trace_phase_2()
```