Feuille Exo_13 : Matrices d'une application linéaire

Ex 1 : On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice dans la base canonique : $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

On note $u_1 = (-1, -1, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 0)$ et $u_3 = (-1/2, -1/2, 0))$.

1) Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$.
3) Montrer la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
4) Calculer A^n pour n appartenant à $\mathbb{N}$.
5) En déduire pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice de f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
6) Justifier pour $n \in \mathbb{N}$ que f est bijective et déterminer la matrice de f^{-n} dans la base canonique.

Ex 2 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On note : $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $u_1 = (1, -2)$ et $u_2 = (2, -2)$,

1) Vérifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$
2) Déterminer la matrice Δ de f dans la base (u_1, u_2).
3) Déterminer une matrice P inversible telle que : $A = P\Delta P^{-1}$
4) En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Ex 3 : Soit $e_1 = (1, 1, 2)$, $e_2 = (1, 1, 1)$ et $e_3 = (1, 2, 1))$

1) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer les coordonnées d'un vecteur quelconque (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

On considère alors l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ telle que :
$$f(e_1) = (1, 2, 3),\ f(e_2) = (1, 2, 0) \text{ et } f(e_3) = (1, 0, 0).$$
Remarque : cette application est bien définie car (e_1, e_2, e_3) *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

3) f est-elle bijective ?
4) si oui, déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

Ex 4 : Une espèce animale vit dans deux zones distinctes :
— la zone A (forêt),
— la zone B (prairie).
Chaque année, les déplacements des individus obéissent aux règles suivantes :
— parmi les individus présents en A, 60 % restent en A l'année suivante et 40 % vont en B ;
— parmi les individus présents en B, 30 % vont en A l'année suivante et 70 % restent en B.
On suppose que ces proportions sont constantes au cours du temps et que le comportement des individus est indépendant.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$
où a_n (resp. b_n) désigne la proportion d'individus présents en zone A (resp. B) l'année n.

1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n + b_n = 1$.
2) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de la forme
$$X_{n+1} = MX_n,$$
où M est une matrice que l'on précisera.

3) Vérifier que la matrice M est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

4) On pose

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Vérifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
   b) Calculer Mu_1 et Mu_2.
   c) En déduire la matrice Δ dans la base (u_1, u_2) de l'application linéaire associée à M

5) Déterminer une matrice inversible P telle que

$$M = P\Delta P^{-1}.$$

6) En déduire une expression explicite de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) On suppose que la répartition initiale est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} \quad \text{avec } p \in [0, 1].$$

Exprimer X_n puis déterminer la limite de X_n lorsque $n \to +\infty$. Interpréter le résultat.