Colles de mathématiques - Semaine 12 - du 5/01/26

La colle commencera par une question de cours, les démonstrations peuvent être données en exercice.

- **Révision sur les applications linéaires.**

  Etude d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ définie par sa matrice dans les bases canoniques

- **Application linéaire en dimension finie.**

  Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.

  Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.

  Pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

  Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.

  Pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité. *(Contre-exemple en dimension infinie)*

  Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation des endomorphismes bijectifs.

  Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

  L'application $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ v & \longmapsto & \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(v) \end{array}$ est un isomorphisme.

  Matrice d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, une base ayant été choisie pour chacun d'eux.

  Théorème : $\forall u \in E, \quad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\ \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$

  Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application réciproque d'un isomorphisme.

  Matrice de f^n.

  Les démonstrations ont été faites avec la proposition :

  Si on trouve une matrice A vérifiant $\forall u \in E, \quad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = A\ \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$ alors $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = A$

  Un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, sa matrice, dans une base quelconque, est inversible,

  Matrice vue comme une application linéaire.

  La matrice M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est canoniquement associée à $\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$

  Définition du noyau et de l'image d'une matrice.

  Théorème du rang pour une matrice.

  Changement de base. Matrice de changement de base. (notation $P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$)

  Action sur les coordonnées d'un vecteurs. Action sur la matrice d'un endomorphisme.

  "Toute identification entre vecteur de $\mathbb{K}^n$ et sa représentation matricielle dans une base, même canonique, est à éviter".

  Définition du noyau et de l'image d'une matrice. Théorème du rang pour une matrice.

  Matrices semblables. *(Utilisation pour le calcul des puissances de matrices).*

  Extrait du programme : *"On ne parlera pas de matrices équivalentes".*

  Nous n'avons pas encore vu le chapitre sur les éléments propres et la diagonalisation.

- **Python.**

  Méthode d'Euler. *Equation du premier ordre d'inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}$. Système différentielle. Equation du second ordre d'inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

- On pourra commencer par des questions sur le paragraphe révision sur les applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

- On vérifiera que les formules suivantes sont connues et comprises *(Les élèves doivent pouvoir donner le contexte).*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(\mathscr{B})) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$$

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) \qquad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^m) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^m$$

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \qquad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(u) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\,P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

- On pourra donner des exercices sur les chaines de Markov, mais le vocabulaire associé n'est pas connu.