Correction de la feuille Exo_13 : Matrices d'une application linéaire

Ex 1 : 1) La matrice de $\mathscr{B}$ dans la base canonique vaut $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ son rang est le même que celui de $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est 3 donc elle est inversible.

$$\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

On notera $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) $Coord_{\mathscr{C}}(f(u_1)) = MCoord_{\mathscr{C}}(u_1)$ donc $Coord_{\mathscr{C}}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\boxed{f(u_1) = (-2, -2, 2)}$$

de même on montre

$$\boxed{f(u_2) = (-3, -1, 1) \text{ et } f(u_3) = (-2, -1, 0)}$$

3) on remarque que $f(u_1) = 2u_1 + 0u_2 + 0u_3$, $f(u_2) = u_1 + 2u_2 + 0u_3$ et $f(u_3) = 0u_1 + 1u_2 + 2u_3$ donc

$$\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans } \mathscr{B} \text{ est } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

4) On note $A = 2I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on remarque que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\forall k \geqslant 3,\ N^k = 0_{3\times 3}$

$(2I_3)N = N(2I_3)$ donc on peut appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned} A^n &= (2I_3 + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k \\ &= \binom{n}{0} 2^n N^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} N^1 + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

5) A^n est la matrice de f^n dans $\mathscr{B}$ et la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ est égale à $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc

$$\begin{aligned} Mat_{\mathscr{C}}(f^n) &= PA^nP^{-1} \\ &= ... \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice de } f^n \text{ dans } \mathscr{C} \text{ vaut } PA^nP^{-1}}$$

Nous n'avons pas eu le temps de calculer P^{-1} et ce produit matriciel

6) *(non corrigé)*

Ex 2 : *Remarques introductives pas nécessaires dans une copie :*

f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe (x', y') tel que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$f((x, y)) = (7x + 2y, -4x + y)$$

1) La matrice de (u_1, u_2) dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ et cette matrice est inversible car son déterminant est non nul donc

$$\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$$

On notera $\mathscr{C}$ la base canonique et $\mathscr{B}$ la base (u_1, u_2).

2) • $f(u_1) = f((1, -2)) = (3, -6)$ donc $f(u_1) = 3u_1$ et ainsi $Coord_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $f(u_2) = f((2, -2)) = (10, -10)$ donc $f(u_2) = 5u_2$ et ainsi $Coord_{\mathscr{B}}(u_5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

En conclusion :

$$\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ est la matrice } f \text{ dans la base } (u_1, u_2)}$$

3) $A = \text{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$ et $\Delta = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ donc en posant $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}$ *(matrice de changement de base $Mat_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$)*

On a bien *(formule de changement de base)* $\boxed{\text{une matrice } P \text{ inversible telle que : } A = P\Delta P^{-1}}$

4) $A^n = \text{Mat}_{\mathscr{C}}(f^n)$ et $\Delta^n = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n)$ donc en posant $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}$

on obtient :

$$\begin{aligned}
A^n &= P\Delta^n P^{-1} \qquad \textit{(formule de changement de base)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2(3^n) & -2(3^n) \\ 2(5^n) & 5^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2(3^n) + 4(5^n) & -2(3^n) + 2(5^n) \\ 4(3^n) - 4(5^n) & 4(3^n) - 2(5^n) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} -3^n + 2(5^n) & -3^n + 5^n \\ 2(3^n) - 2(5^n) & 2(3^n) - 5^n \end{pmatrix}}$$

Remarque : Il est bien de vérifier au brouillon que ce résultat est bien correct pour $n = 0$ et $n = 1$.

Ex 3 : *(non corrigé)*

Ex 4 : *(non corrigé)*