Feuille_Cours_7 : Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice.

Ex 1 : Montrer que -1 est une valeur propre de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminer une base de $E_{-1}(M)$

Ex 2 : Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes puis une base des sous-espaces propres associés :

On répondra séparément suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 3 : Déterminer les valeurs propres des endomorphismes suivants puis une base des sous-espaces propres associés :

1) $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ $\quad f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$

2) $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ $\quad \varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$

3) $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$ $\quad f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, 3x) \end{array}$

4) $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ $\quad \varphi : \begin{array}{rcl} C^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$

Ex 4 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$.
on note f l'endomorphisme de E définie par $f(e_1) = 4e_1 - 2e_2$ et $f(e_2) = e_1 + e_2$.

1) Déterminer le spectre de f.
2) Justifier que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.
3) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de f.

Ex 5 : Pour n fixé, $\quad \varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & XP'(X) \end{array}$

1) Déterminer le spectre de φ.
2) Justifier que les sous-espaces propres de φ sont de dimension 1.
3) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de φ.

Ex 6 : Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = e_1 - 2e_2 - 2e_3 \qquad f(e_2) = -e_1 + e_3 \qquad f(e_3) = -e_3$$

1) Montrer que -1 est une valeur propre de f.
2) Déterminer une base du sous-espace propre de f associé à la valeur propre -1.

Ex 7 : Soit A une matrice carrée,

1) Montrer que les A et A^T ont les mêmes valeurs propres.
2) Soit λ une valeur propre de A (et de A^T),
Montrer que $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(A^T)$ ont même dimension.

Ex 8 : Soit A et B deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1) Montrer que A et B ont même spectre.
2) Soit λ une valeur propre de A (et de B),
Montrer que $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(B)$ ont même dimension.

Ex 9 : Soit M une matrice $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, U une matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et λ un scalaire de $\mathbb{K}$.

1) Soit λ une valeur propre de M associé au vecteur propre U,
montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, λ^n est une valeur propre de M^n associée au vecteur propre U.
2) Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$,
Montrer que si $P(M) = 0_{p\times p}$ et si λ est une valeur propre de M alors λ est une racine de P.
3) **Application.**
Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$,
On admet que : $A(A+4I_4)^3 = 0$
(on peut faire ce calcul en s'organisant bien mais il ne faut perdre trop de temps)
a. Déterminer le spectre de A.
b. Déterminer la dimension des sous-espaces propres de A.

Ex 10 : Soit f un endomorphisme de E, u un vecteur de E et λ un scalaire de $\mathbb{K}$.

1) Montrer que si λ est une valeur propre de f associée au vecteur propre u alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, λ^n est une valeur propre de f^n associée au vecteur propre u.
2) Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$,
Montrer que si $\lambda \in \mathrm{sp}(f)$ et $P(f) = 0$ alors λ est une racine de P.
3) **Application.**
Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est égale à $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
a. Déterminer la matrice de p^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
b. En déduire le spectre de p.
c. Déterminer la dimension des sous-espaces propres de p

Ex 11 : Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1) Montrer que si les sommes de chaque ligne de M sont égales à une même constante c
alors c est une valeur propre de M.
2) Montrer que ce résultat est encore vrai sur les colonnes.

Ex 12 : Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, u_1 et u_2 deux vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 \neq \lambda_2$,
Montrer que (u_1, u_2) est libre.