Correction de la feuille_Cours_7 : Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice.

Les parties encadrées rappel de cours ne sont pas nécessaires dans une copie bien rédigée.

Ex 1 : λ valeur propre $\iff$ $\mathrm{rg}(M-\lambda I_n)<n$

$$\mathrm{rg}(M-(-1)I_3)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=1<3 \quad \text{donc} \quad \boxed{-1 \text{ est une valeur propre de } M}$$

– –

Remarque : rg$(M-(-1)I_3)=1$ donc le théorème du rang donne dim$(E_{-1}(M))=2$

$\dim(E_\lambda(M))+\mathrm{rg}(M-\lambda I_n)=n$

– –

$X\in E_\lambda(M)) \iff (M-\lambda I_n)X=0_{n\times 1}$

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
X\in E_{-1}(M)) &\iff \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff x+y+z=0\\
&\iff X\in \mathrm{Vect}<\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\text{libre}}>
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\text{ est une base de } E_{-1}(M))}$$

Ex 2 : λ valeur propre $\iff$ $\mathrm{rg}(M-\lambda I_n)<n$

$$\begin{aligned}
\lambda\in\mathrm{Sp}(M_1) &\iff \mathrm{rg}(M_1-\lambda I_2)<2 \qquad \textit{(ou } M_1-\lambda I_2 \textit{ non inversible)}\\
&\iff \begin{vmatrix}-\lambda&2\\-1&-\lambda\end{vmatrix}=0\\
&\iff \lambda^2+2=0
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{Si } \mathbb{K}=\mathbb{R} \text{ alors } \mathrm{Sp}(M_1)=\varnothing}$ et $\boxed{\text{Si } \mathbb{K}=\mathbb{C} \text{ alors } \mathrm{Sp}(M_1)=\{-i\sqrt{2};i\sqrt{2}\}}$

Nous n'avons pas déterminé les sous-espaces propres de M_1 en classe.

• *Pour* M_5

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M_5-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 1 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\lambda\\ -\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\end{pmatrix} && \textit{(Change l'ordre des lignes)}\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\lambda\\ 0 & 1 & -\lambda^2\\ 0 & -\lambda & 1\end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2+\lambda L_1\\
&= \mathrm{rg}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & -\lambda\\ 0 & 1 & -\lambda^2\\ 0 & 0 & 1-\lambda^3\end{pmatrix}}_{\text{triangulaire}} && L_3 \leftarrow L_3+\lambda L_2
\end{aligned}$$

donc $\quad \mathrm{rg}(M_5-\lambda I_3) < 3$ si, et seulement si, $\lambda^3 = 1$

$$\boxed{\text{si } \mathbb{K}=\mathbb{R},\ \mathrm{Sp}(M_5)=\{1\} \qquad \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{C},\ \mathrm{Sp}(M_5)=\left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}}$$

• Si $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_1(M_5) \iff \begin{cases} x-y &= 0\\ y-z &= 0\end{cases}$ donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1(M_5)}$.

• Si $\lambda = e^{i\frac{2\pi}{3}}$: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_1(M_5) \iff \begin{cases} x - e^{i\frac{2\pi}{3}} z &= 0\\ y - e^{i\frac{4\pi}{3}} z &= 0\end{cases}$ donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix}e^{i\frac{2\pi}{3}}\\e^{i\frac{4\pi}{3}}\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{e^{i\frac{2\pi}{3}}}(M_5)}$.

• Si $\lambda = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_1(M_5) \iff \begin{cases} x - e^{-i\frac{2\pi}{3}} z &= 0\\ y - e^{-i\frac{4\pi}{3}} z &= 0\end{cases}$ donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\\e^{-i\frac{4\pi}{3}}\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}(M_5)}$.

• *Pour* M_6 *(D'autres calculs sont possibles, je montre ce qu'avait fait Erwan au tableau)*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M_6-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ -1 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 2-\lambda & 1\\ 2-\lambda & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix} && L_2 \longleftrightarrow L_1\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & -(2-\lambda)^2 & -(2-\lambda)\\ 0 & (2-\lambda) & (2-\lambda)\end{pmatrix} && \begin{array}{l}L_2 \leftarrow L_2-(2-\lambda)L_1\\ L_3 \leftarrow L_3+L_1\end{array}
\end{aligned}$$

Là on fait une disjonnction de cas —

• Si $\lambda = 2$ alors $\mathrm{rg}(M_6-\lambda I_3) = 1$ et $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_2(M_6) \iff x+0y+z=0$

donc 2 est une valeur propre et $\boxed{\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_2(M_6)}$.

(Ne pas oublier de vérifier vos résultats)

• Si $\lambda \neq 2$ alors $\mathrm{rg}(M_6-\lambda I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & -(2-\lambda) & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -(2-\lambda) & 1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}}_{\textit{triangulaire}}$

On peut en déduire que :

$$\boxed{\text{Le spectre de } M_6 \text{ est } \{1,2\}}$$

(Il reste à trouver une base de $E_1(M_6)$)

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(M_6) \iff \left\{ \begin{array}{r} x+y+z=0 \\ y+z=0 \end{array} \right.$ donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_1(M_6)}$.

• *Pour M_7 (D'autres calculs sont possibles, je montre ce qu'avait fait Klervie au tableau)*

$$\begin{aligned}
\text{rg}(M_7 - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -5-\lambda & 0 \\ 1 & 8 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1-\lambda \\ 0 & -5-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \longleftrightarrow L_1 \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1-\lambda \\ 0 & -5-\lambda & 0 \\ 0 & 2-8(1-\lambda) & 1-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1 \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1-\lambda \\ 0 & -5-\lambda & 0 \\ 0 & 8\lambda-6 & 2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1-\lambda \\ 0 & 8\lambda-6 & 2\lambda-\lambda^2 \\ 0 & -5-\lambda & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \longleftrightarrow L_2
\end{aligned}$$

jusque là que des opérations sur les lignes –

$$= \text{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 8 \\ 0 & 2\lambda-\lambda^2 & 8\lambda-6 \\ 0 & 0 & -5-\lambda \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire}} \qquad C_3 \longleftrightarrow C_2$$

donc $\quad \text{rg}(M_7 - \lambda I_3) < 3$ si, et seulement si, $\lambda = -5$ ou $2\lambda - \lambda^2 = 0$

or $2\lambda - \lambda^2 = \lambda(2-\lambda)$ donc

$$\boxed{\text{Sp}(M_7) = \{-5\,,\,0\,,\,2\}}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

• Pour $\lambda = -5$.

$$\begin{aligned}
X \in E_{-5}(M_7)) \quad &\iff \quad (M_7 + 5I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 0 & -46 & -35 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{En utilisant les opérations élémentaires faites pour le calcul du rang (Si vous ne comprenez pas, refaites tous les calculs)} \\
&\iff X \in \text{Vect} < \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -35 \\ 46 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} > \qquad \textit{(On sait que c'est de dimension 1 il suffit de trouver une solution non nulle)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -35 \\ 46 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{-5}(M_7))}$$

• Pour $\lambda = 0$.

$$\begin{aligned} X \in E_0(M_7)) &\iff (M_7 - 0I_3)X = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \text{Vect} < \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} > \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_0(M_7))}$$

• Pour $\lambda = 2$.

$$\begin{aligned} X \in E_2(M_7)) &\iff (M_7 - 2I_3)X = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \text{Vect} < \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\0\\1 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} > \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1\\0\\1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_2(M_7))}$$

• *Pour M_8 (comme pour toutes les matrices) il y a plusieurs approches je fais ce que nous avons fait en classe.*

$$\begin{aligned} \text{rg}(M_8 - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1\\ 1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} && L_2 \longleftrightarrow L_1 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 2\lambda-\lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 2\lambda-\lambda^2 & \lambda\\ 0 & 3\lambda-\lambda^2 & 0 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{aligned}$$

jusque là que des opérations sur les lignes –

$$= \text{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda & 2\lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & 3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire}} \qquad C_3 \longleftrightarrow C_2$$

donc $\quad \text{rg}(M_8 - \lambda I_3) < 3$ si, et seulement si, $\lambda = 0$ ou $3\lambda - \lambda^2 = 0$

or $3\lambda - \lambda^2 = \lambda(3-\lambda)$ donc

$$\boxed{\text{Sp}(M_8) = \{0\,,\,3\}}$$

- $\boxed{X \in E_\lambda(M)) \iff (M - \lambda I_n)X = 0_{n\times 1}}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} X \in E_0(M_8)) &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x + y + z = 0 \\ &\iff X \in \text{Vect} < \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} > \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_0(M_8))}$$

- $\boxed{X \in E_\lambda(M)) \iff (M - \lambda I_n)X = 0_{n\times 1}}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} X \in E_3(M_8)) &\iff (M_8 - 3I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \text{Vect} < \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{libre}} > \end{aligned}$$

En utilisant les opérations élémentaires faites pour le calcul du rang (Si vous ne comprenez pas, refaites tous les calculs)

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_3(M_8))}$$

Remarque : Pour la matrice M_8 les réponses sont identiques que $\mathbb{K}$ soit égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$.

Ex 3 : 1) $\boxed{\text{Quelle que soit la matrice } \mathscr{B},\ Sp(f) = Sp\big(Mat_{\mathscr{B}}(f)\big)}$

- On note M la matrice de f dans la base canonique, on a $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ donc $\lambda \in Sp(M) \iff \lambda^2 - 1 = 0$

$$\boxed{\text{Sp}(f) = \{-1; 1\}}$$

Quelle que soit $\lambda \in Sp(f)$, $u \in E_\lambda(f) \iff f(u) = \lambda u$

• Pour $\lambda = 1$,
Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} u \in E_1(f) &\iff f(u) = u \\ &\iff \begin{cases} x = y \\ y = x \end{cases} \\ &\iff y = x \end{aligned}$$

$$\boxed{((1,1)) \text{ est une base de } E_1(f)}$$

• Pour $\lambda = -1$,
Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} u \in E_{-1}(f) &\iff f(u) = -u \\ &\iff \begin{cases} x = -y \\ y = -x \end{cases} \\ &\iff y = -x \end{aligned}$$

$$\boxed{((1,-1)) \text{ est une base de } E_{-1}(f)}$$

2) $\lambda \in Sp(f) \iff \exists u \neq 0_E : f(u) = \lambda u$

• Si $\lambda \neq 0$, quel que soit le polynôme P non nul, deg $(P') \neq \deg(\lambda P)$ donc $P' \neq \lambda P$ et ainsi

$$\lambda \text{ n'est pas une valeur propre de } f$$

• pour $P = 1$ on a $P \neq 0$ et $\varphi(P) = 0$ donc 0 est une valeur propre de φ.
en conclusion :

$$\boxed{0 \text{ est l'unique valeur propre de } \varphi}$$

Quelle que soit $\lambda \in Sp(f)$, $u \in E_\lambda(f) \iff f(u) = \lambda u$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{aligned} P \in E_0(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0_E \\ &\iff P' = 0 \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R} : P(X) = a \end{aligned}$$

$$\boxed{(1) \text{ est une base de } E_0(\varphi)}$$

3) Quelle que soit la matrice $\mathscr{B}$, $Sp(f) = Sp\big(Mat_{\mathscr{B}}(f)\big)$

• On note M la matrice de f dans la base canonique, on a $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$M - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \lambda \in Sp(M) \iff \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \iff (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{-1; 3\}}$$

$$\boxed{\text{Quelle que soit } \lambda \in Sp(f),\ u \in E_\lambda(f) \iff f(u) = \lambda u}$$

• Pour $\lambda = -1$,
Soit $u = (x, y) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned} u \in E_{-1}(f) &\iff f(u) = -u \\ &\iff \left\{ \begin{array}{r} 2x + y = -x \\ 3x = -y \end{array} \right. \\ &\iff 3x + y = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{((1, -3)) \text{ est une base de } E_{-1}(f)}$$

• Pour $\lambda = 3$,
Soit $u = (x, y) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned} u \in E_{3}(f) &\iff f(u) = 3u \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 3x \\ 3x = 3y \end{array} \right. \\ &\iff y = x \end{aligned}$$

$$\boxed{((1, 1)) \text{ est une base de } E_{3}(f)}$$

4) $\boxed{\lambda \in Sp(f) \iff \exists u \neq 0_E : f(u) = \lambda u}$

Soit λ un réel quelconque,
en prenant $f : t \longmapsto e^{\lambda t}$ on a : $f \neq 0$ et $\varphi(f) = \lambda f$ donc $\lambda \in \mathrm{sp}(\varphi)$

$$\boxed{\text{Le spectre de } \varphi \text{ est } \mathbb{R} \text{ tout entier}}$$

$$\boxed{\text{Quelle que soit } \lambda \in Sp(f),\ u \in E_\lambda(f) \iff f(u) = \lambda u}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$f \in E_\lambda(f) \iff f' = \lambda f \iff \exists k \in \mathbb{R} : f : t \longmapsto ke^{-\lambda t}$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \lambda, \quad \left(t \longmapsto e^{-\lambda t}\right) \text{ est une base de } E_\lambda(f)}$$

(Remarque : pour tout λ, $E_\lambda(f)$ est de dimension 1)

Ex 4 : 1) Le vecteur e_3 est non nul et $f(e_3) = (-1)e_3$ donc $\boxed{-1 \text{ est une valeur propre de } f}$.

2) On note $E = \mathbb{R}^3$.

Rédaction 1.

Soit $u \in E$, on note $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$

$$\begin{aligned}
u \in E_{-1} &\iff f(u) = -u \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x - y &= 0 \\ -2x + y &= 0 \\ -2x + y &= 0 \end{cases} \\
&\iff 2x - y = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \\
&\iff u \in \mathrm{Vect} < e_1 + 2e_2 \ ; \ e_3 >
\end{aligned}$$

$$\boxed{(e_1 + 2e_2 \ ; \ e_3) \text{ est une base du sous-espace propre de } f \text{ associé à la valeur propre } -1}$$

Rédaction2.

Soit $u \in E$, on note $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$

$$\begin{aligned}
u \in E_{-1} &\iff f(u) = -u \\
&\iff xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = -(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\
&\iff x(e_1 - 2e_2 - 2e_3) + y(-e_1 + e_3) + z(-e_3) = -(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\
&\iff (x - y)e_1 + (-x)e_2 + (-x - y - z)e_3 = -xe_1 - ye_2 - ze_3 \\
&\iff \begin{cases} x - y &= -x \\ -2x &= -y \\ -2x - y - z &= -z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x - y &= 0 \\ -2x + y &= 0 \\ -2x + y &= 0 \end{cases} \\
&\iff y = 2x \\
&\iff u = xe_1 + 2xe_2 + ze_3 \\
&\iff u = x\,(e_1 + 2e_2) + z\,e_3 \\
&\iff u \in \mathrm{Vect} < e_1 + 2e_2 \ ; \ e_3 >
\end{aligned}$$

$$\boxed{(e_1 + 2e_2 \ ; \ e_3) \text{ est une base du sous-espace propre de } f \text{ associé à la valeur propre } -1}$$

Ex 5 : *(on peut utiliser une matrice mais aussi :)*

1) En notant $g = \varphi - \lambda Id_E$ et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\text{pour tout } k \in [\![0; n]\!], \quad g(X^k) = (k - \lambda)X^k$$

si $\lambda \in [\![0; n]\!]$, alors $g(\mathscr{B})$ n'est pas une base, et si $\lambda \notin [\![0; n]\!]$, alors $g(\mathscr{B})$ est une base,

Autrement dit : $g(\mathscr{B})$ n'est pas une base si, et seulement si, $\lambda \in [\![0; n]\!]$

donc $\boxed{\text{Le spectre de } \varphi \text{ est } [\![0; n]\!]}$

2) Avec les notations de la question précédente : on remarque que pour $k \in [\![0; n]\!]$, $\mathrm{rg}(g) = n - 1$ donc

$$\boxed{\text{Pour tout } \lambda \in [\![0; n]\!], \ \dim(E_\lambda(f)) = 1}$$

3) Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $X^k \in E_k(f)$ et $\dim(E_\lambda(f)) = 1$ donc

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![0; n]\!], \ E_k(f) \text{ a pour base } (X^k)}$$

Ex 6 : *(non corrigé)*

Ex 7 : Soit A une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) $\boxed{\lambda \text{ valeur propre } \iff \operatorname{rg}(M - \lambda I_n) < n}$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - \lambda\, I_n) &= \operatorname{rg}\Big((A - \lambda\, I_n)^\top\Big) \\ &= \operatorname{rg}(A^T - \lambda\, I_n^T) \\ &= \operatorname{rg}(A^T - \lambda\, I_n) \end{aligned}$$

ainsi : $\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \iff \operatorname{rg}(A - \lambda\, I_n) < n \iff \operatorname{rg}(A^T - \lambda\, I_n) < n \iff \lambda \in \operatorname{Sp}(A^T)$

donc $\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(A^\top)}$

2) $\boxed{\dim(E_\lambda(M)) + \operatorname{rg}(M - \lambda I_n) = n}$

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \quad \big(= \operatorname{Sp}(A^\top)\big)$,

$$\begin{aligned} \dim\left(E_\lambda(A)\right) &= n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) && \textit{(théorème du rang)} \\ &= n - \operatorname{rg}(A^\top - \lambda I_n) \\ &= \dim\left(E_\lambda(A^\top)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \lambda \in \operatorname{Sp}(A),\ \dim\left(E_\lambda(A^\top)\right) = \dim\left(E_\lambda(A)\right)}$$

Ex 8 : A et B sont deux matrices semblables donc A et B représentent le même endomorphisme dans deux bases :

$$A = Mat_{\mathscr{B}}(f) \qquad\qquad B = Mat_{\mathscr{B}'}(f)$$

1) $\boxed{\text{Quelle que soit la matrice } \mathscr{B},\ Sp(f) = Sp\big(Mat_{\mathscr{B}}(f)\big)}$

$$\begin{aligned} Sp(A) &= Sp(Mat_{\mathscr{B}}(f)) \\ &= Sp(f) \\ &= Sp(Mat_{\mathscr{B}'}(f)) \\ &= Sp(B) \end{aligned}$$

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ ont même spectre}}$$

2) $\boxed{\text{Quelle que soit la matrice } \mathscr{B},\ \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\big(Mat_{\mathscr{B}}(f)\big)}$

Soit λ une valeur propre de A (et de B),

$$\begin{aligned} \dim(E_\lambda(A)) &= n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \\ &= n - \operatorname{rg}(Mat_{\mathscr{B}}(f) - \lambda I_n) \\ &= n - \operatorname{rg}(Mat_{\mathscr{B}}(f - \lambda Id_E)) \\ &= n - \operatorname{rg}(f - \lambda Id_E) \end{aligned}$$

de même on montre : $\dim(E_\lambda(B)) = n - \operatorname{rg}(f - \lambda Id_E)$
on a bien :

$$\boxed{E_\lambda(A) \text{ et } E_\lambda(B) \text{ ont même dimension}}$$

Ex 9 : 1) Soient $U \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
on suppose que $U \neq 0$ et $MU = \lambda U$, *(λ valeur propre de M associée à U)*

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n U = \lambda^n U$

- Pour $n = 0$,
  On a d'une part $M^0 U = I_n U = U$ et $\lambda^0 U = 1U = U$

  la propriété est vraie pour $n = 0$,

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n U = \lambda^n U$,

$$\begin{aligned} M^{n+1}U &= M^n (MU) \\ &= M^n (\lambda U) \\ &= \lambda (M^n U) \\ &= \lambda (\lambda^n U) \qquad \textit{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \lambda^{n+1} U \end{aligned}$$

En conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n U = \lambda^n U$.

or $U \neq 0_{p\times 1}$ donc

$$\boxed{\lambda^n \text{ valeur propre de } M^n \text{ associée à } U}$$

2) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $U \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \in \mathbb{K}[X]$,
on suppose que : $P(M) = 0_{p\times p}$, $U \neq 0_{p\times 1}$ et $MU = \lambda U$, *(λ valeur propre de M associée à U)*

$P(M) = 0$ donc $P(M)U = 0_{p\times 1}$ et ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k M^k U = 0_{p\times 1}$

or on a montré en a) que $M^k U = \lambda^k U$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k U = 0_{p\times 1}$ on en déduit que : $P(\lambda)U = 0_{p\times 1}$

or $U \neq 0_{p\times 1}$ donc $P(\lambda) = 0$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{Si } P(M) = 0_{p\times p} \text{ alors toute valeur propre de } M \text{ est une racine de } P.}$$

Autrement dit : Le spectre de M est inclus dans l'ensemble des racines de P.
Attention : toutes les racines de P ne sont pas nécessairement des valeurs propres de M.

3) On admet $A(A + 4I_4)^3 = 0_{p\times p}$

a. En notant $P(X) = X(X+4)^3$ on a $P(A) = 0_{p\times p}$ et les racines de P sont 0 et -4,
donc *(en utilisant le résultat de la question 2))* le spectre de A est inclus dans $\{0, -4\}$.

Il reste à montrer que 0 et 4 sont bien des valeurs propres de A.

Pour $\lambda = 0$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A - 0I_4) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \text{ puis } L_2 \leftrightarrow L_3 \text{ puis } L_3 \leftrightarrow L_4 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 5 & -3 \\ 0 & \boxed{4} & -8 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&= 3 \quad (\neq 4)
\end{aligned}$$

donc 0 est une valeur propre de A

Pour $\lambda = -4$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A + 4I_4) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{8} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 - L_2 \end{array} \\
&= 2 \quad (\neq 4)
\end{aligned}$$

donc -4 est une valeur propre de A

En conclusion :

$$\boxed{\text{Le spectre de } A \text{ est } \{0, -4\}}$$

b. $$\boxed{\dim(E_\lambda(M)) + \operatorname{rg}(M - \lambda I_n) = n}$$

$\mathrm{S}p(A) = \{0, -4\}$ et les calculs de rang précédents montrent que :

$$\boxed{\dim(E_0(A)) = 1 \ \text{ et } \ \dim(E_{-4}(A)) = 2}$$

Ex 10 : *(non corrigé)*

Ex 11 : Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1) Si les sommes de chaque ligne de M sont égales à une même constante c alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$; $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = c$

   autrement dit : $M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix}$ ce qui donne $M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

   et comme $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{c \text{ est une valeur propre de } M}$$

2) Si les sommes de chaque colonne de M sont égales à un c alors d'après 1) c est une valeur propre de M^T, or sp(M) =sp(M^T) (en effet : $\text{rg}(M - \lambda I_n) = \text{rg}(M^T - \lambda I_n)$)

$$\boxed{\text{Si les sommes de chaque colonne de } M \text{ sont égales à un } c \text{ alors } c \text{ est une valeur propre de } M}$$

Ex 12 : *(non corrigé)*