Feuille_Cours_7_1 : Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice.

Ex 1 : Déterminer le spectre des matrices suivantes.

(On distinguera $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ si nécessaire).

$$M_1=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\qquad M_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\qquad M_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$M_4=2\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\qquad M_5=\begin{pmatrix}1-i & 1+i\\ 1+i & 1-i\end{pmatrix}\qquad M_6=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Ex 2 : Déterminer le spectre des matrices suivantes.

(On distinguera $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ si nécessaire).

$$M_1=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\qquad M_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\qquad M_3=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$M_4=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\qquad M_5=2\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad M_6=\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ex 3 : On note $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ -1 & 3 & -1\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix}$

1) Déterminer le spectre de A.
2) Déterminer pour chaque valeur propre de A une base du sous espace propre associé.

Ex 4 : Reprendre l'**Ex 3** avec la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Ex 5 : On note $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

On admet que $Sp(A)=\{-3,2\}$ et on note $B=\frac{1}{6}A$ et $C=2A$.

Quel est le spectre des matrices B et C ? *(on prendra soin de bien justifier la réponse)*

Ex 6 : *Agro-Véto 2013* Considérons la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$: $A=\begin{pmatrix}1+2i & 2i & 1+i\\ -1-i & -i & -1-i\\ -2i & -2i & -i\end{pmatrix}$

1) Déterminer les valeurs propres de A.
Pour $\lambda\in\mathbb{C}$, il est conseillé de commencer par l'opération élémentaire $L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3$ sur la matrice $A-\lambda I_3$, puis de distinguer deux cas selon que $\lambda=-i$ ou $\lambda\neq -i$.
2) Pour chaque valeur de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.

On admet dans la suite que pour $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

❶ M a au plus n valeurs propres. Autrement dit : $\mathrm{card}(Sp(M))\leqslant n$

❷ La somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.

Autrement dit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\dim(E_{\lambda_k}(M))=n$

Ex 7 : Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes : *(sans presque aucun calcul)*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour M_1 on remarquera que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre.

Ex 8 : Déterminer le spectre des matrices de $\mathscr{M}_9(\mathbb{C})$ suivantes :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$