Feuille_Exo_14 : Valeurs propres. Vecteurs propres.

Ex 1 : On considère d'une part deux urnes A et B et d'autre part 3 boules numérotées de 1 à 3.

On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et 3 et on transfère la boule portant le numéro correspondant dans l'urne où elle n'était pas.

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

On suppose que X_0 suit la loi uniforme sur $[\![0;3]\!]$.

1) Écrire une fonction Python qui prend en argument une valeur de n, simule la réalisation de la variable aléatoire X_n et renvoie la valeur de X_n obtenue.

2) Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

   Déterminer U_0 et démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.

3) Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E.

   Soit φ l'application définie sur E par : $\forall P \in E, \quad \varphi(P) = XP(X) + \dfrac{1}{3}(1 - X^2)P'(X)$.

   a. Montrer que φ est un endomorphisme de E, justifier que sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.

   b. Pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, on pose : $P_k(X) = \dfrac{1}{8}(X-1)^k(X+1)^{3-k}$.

   Démontrer que pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, $\varphi(P_k) = \left(1 - \dfrac{2}{3}k\right) P_k$.

   c. En déduire les valeurs propres de φ et une base de chaque sous-espace propre.

   On rappelle que φ a au plus 4 valeurs propres distinctes

4) On pose : $Q = \dfrac{1}{4}(X^3 + X^2 + X + 1)$.

   a. Expliciter les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}$. Quel vecteur retrouve-t-on ?

   b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n P_2$.

5) À l'aide des questions précédentes, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 2)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 3)$.

   Par quelle loi pourrait-on approcher la loi de X_n pour une grande valeur de n ?

6) Vérifier le résultat de la question précédente à l'aide d'une simulation informatique.

Ex 2 : On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de l'endomorphisme f, avec $\lambda_1 < \lambda_2$
2) La matrice A est-elle inversible ? (*On ne demande pas la matrice A^{-1}*).
3) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de E vérifiant :
   - $\overrightarrow{u_1}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_1.
   - la première composante de $\overrightarrow{u_1}$ est 1.
4) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ de E vérifiant :
   - $\overrightarrow{u_2}$ est un vecteur propre de f associe à la valeur propre λ_2
   - la deuxième composante de $\overrightarrow{u_2}$ est 1 .

5) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{u_3}$ de E vérifiant :
   - $f\left(\overrightarrow{u_3}\right)=\overrightarrow{u_2}+2\overrightarrow{u_3}$
   - la troisième composante de $\overrightarrow{u_3}$ est 1 .

6) Montrer que $\mathcal{C}=\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\right)$ est une base de E.

7) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$ puis la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$.

8) Donner T la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$

9) Rappeler la relation matricielle entre A et T.

10) Prouver que pour tout élément n de $\mathbb{N}$ on a :

$$T^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

11) En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.

Ex 3 : On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1) a. Déterminer $(A-I)^2$.
   b. En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

2) On pose $A=N+I$.
   a. Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.
   b. Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n=-1$.

3) a. Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.
   b. Montrer qu'aucune base de $\mathbb{R}^3$ n'est formée de 3 vecteurs propres de f

4) On pose $u_1=(f-\mathrm{id})(e_1)$ et $u_2=e_1+e_3$.
   a. Montrer que le rang de $f-$ id est égal à 1 .
   b. Justifier que (u_1,u_2) est une base de $\ker(f-\mathrm{id})$.

5) a. Montrer que (u_1,u_2,e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b. Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

6) Soit la matrice $P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}

7) On note $(E_{1,1},E_{1,2},E_{1,3},E_{2,1},E_{2,2},E_{2,3},E_{3,1},E_{3,2},E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i,j) de $[\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.
   a. Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT=TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1}+E_{3,3},E_{1,2},E_{1,3},E_{2,2},E_{2,3}$

      Vérifier que la dimension de E est égale à 5.
   b. Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA=AN \quad \Leftrightarrow \quad \left(P^{-1}NP\right)T=T\left(P^{-1}NP\right).$$

   c. En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ engendré par la famille $\left(P\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right)P^{-1},PE_{1,2}P^{-1},PE_{1,3}P^{-1},PE_{2,2}P^{-1},PE_{2,3}P^{-1}\right)$