Colles de mathématiques - Semaine 13 - du 12/01/26

La colle commencera par une question de cours, les démonstrations peuvent être données en exercice.

- **Application linéaire en dimension finie.**

  Changement de base. Matrice de changement de base. (notation $P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$)

  Action sur les coordonnées d'un vecteurs. Action sur la matrice d'un endomorphisme.

  "Toute identification entre vecteur de $\mathbb{K}^n$ et sa représentation matricielle dans une base, même canonique, est à éviter".

  Définition du noyau et de l'image d'une matrice. Théorème du rang pour une matrice.

  Matrices semblables. *(Utilisation pour le calcul des puissances de matrices).*

  Extrait du programme : *"On ne parlera pas de matrices équivalentes".*

- **Eléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.**

  Définition d'une valeur propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Définition du spectre.
  Différentes caractérisations des valeurs propres.
  Définition d'un vecteur propre d'un endomorphisme, d'une matrice.
  Définition du sous-espace propre (noté $E_\lambda(f)$ ou $E_\lambda(M)$).
  Lien entre la dimension de $E_\lambda(M)$ et du rang de $M - \lambda I_n$.
  Spectre d'une matrice triangulaire.

  En dimension finie :

  Liens entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux d'une matrice qui le représente dans une base.

  Nous n'avons pas encore vu qu'en dimension n, il y a au plus n valeurs propres.
  Nous n'avons pas encore vu la liberté des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

- **Python.**

  Module `numpy`, incluant le sous-module `linalg` avec les fonctions `eig` et `eigvals`

– –

- On commencera par la recherche du spectre et de bases des sous espaces propres d'une matrice 2×2 ou 3×3.

- On passera aux endomorphismes uniquement si sur les matrices le cours est maitrisé.

- Exercices classiques : *(Savoir faire les démontrations.)*

  A et A^T ont même spectre et pour chaque valeur propre λ, $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda(A^T))$

  si A et B sont semblables alors elles ont même spectre et pour chaque valeur propre λ, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B)$

  si les sommes de chaque ligne de M sont égales à une même constante c alors c est une valeur propre de M.

  si $P(M) = 0_{n\times n}$ alors les valeurs propres de M sont des racines de P.

- Ecrire une fonction qui renvoie `True` si une matrice est carrée, (symétrique ou triangulaire ...) et `False` sinon.

- On pourra donner des exercices sur les chaines de Markov, mais le vocabulaire associé n'est pas connu.