DEVOIR SURVEILLÉ

MATHÉMATIQUES

samedi 10 janvier 2026

(3 heures)

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités ***à encadrer*** *dans la mesure du possible les conclusions.*

La calculatrice est autorisée.

Ce sujet comporte 6 pages.

Un formulaire Python est donné à la fin du sujet.

Les modèles de Gompertz et de Verhulst, issus de la démographie humaine au XIXième siècle, ont ouvert la voie aux modèles biologiques structurés en âge développés au XXième siècle, tels que le modèle de Leslie. Ce sujet est consacré à l'étude de modèles de Leslie à trois ou quatre classes d'âge, formulés sous forme d'une relation matricielle, et à l'analyse de leur comportement à long terme.

Ce problème comporte des questions préliminaires suivies de cinq parties, la partie B utilise les résultats de la partie A et la partie D ceux de la partie C.
Les questions préliminaires servent dans les parties B, C et D.

La partie E est consacrée à des questions d'informatique et les parties B et D sont plus orientées vers l'étude de modèles de dynamique de population.

Les différentes parties peuvent être traitées dans l'ordre de votre choix. Toutefois, pour chacune d'elles, les réponses doivent être présentées dans l'ordre des questions.

Dans ce sujet, on pourra identifier $\mathbb{R}^n$ à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{C}^n$ à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $Sp(A)$ le spectre de A.

Pour tout $\lambda \in Sp(A)$, on note $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à λ.

Rappel.

- Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$,
- Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \exists(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0,0)\} : \ \alpha z_1 = \beta z_2$

Pour $M = (m_{ij})$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

on écrira $M \geqslant 0$ l'assertion : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ m_{ij} \geqslant 0$

on écrira $M > 0$ l'assertion : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ m_{ij} > 0$

Quelques définitions et résultats préliminaires.

Norme 1 d'un vecteur.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $u = (u_1, ..., u_p)$ un vecteur de $\mathbb{C}^p$ on appelle *norme* 1 *de* u le réel défini par : $||u||_1 = \sum_{i=1}^{p} |u_i|$

On admet les propositions suivantes :

— Pour tout $u \in \mathbb{C}^p$, $||u||_1 \geqslant 0$.

— Pour tout $u \in \mathbb{C}^p$, $||u||_1 = 0 \iff u = 0_{\mathbb{C}^p}$.

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $u \in \mathbb{C}^p$, $||\lambda u||_1 = |\lambda|\, ||u||_1$.

— Pour tout $u \in \mathbb{C}^p$ et $v \in \mathbb{C}^p$, $||u+v||_1 \leqslant ||u||_1 + ||v||_1$.

1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on note pour tout n : $X_n = (x_{n,1}, ..., x_{n,p})$

a) Montrer que : $\Big(||X_n||_1\Big)$ tend vers 0 si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n,i} = 0$

On dira que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $X^* = (x_1^*, \ldots, x_p^*) \in \mathbb{R}^p$ si la suite réelle $\big(\|X_n - X^*\|_1\big)$ tend vers 0. D'après la question 1) a), cela revient à dire que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la suite réelle $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_i^*.

b) Montrer que s'il existe $\alpha \in [0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||X_{n+1}||_1 \leqslant \alpha ||X_n||_1$ alors (X_n) converge vers $0_{\mathbb{R}^p}$

2) Ecrire une fonction Python `norme_1(u)` qui prend en entrée une liste de nombres `u` représentant un vecteur et qui renvoie sa norme 1.

Matrice à diagonale strictement dominante.

Soit A une matrice carrée de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$,

On dit que A est à *diagonale strictement dominante* lorsque : $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} |a_{ij}|$

3) Parmi les matrices suivantes, indiquer sans justification, lesquelles sont à diagonale strictement dominante.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - I_4$$

4) Écrire une fonction Python `diag_dominante(A)` qui renvoie `True` si une matrice A est à diagonale strictement dominante, et `False` sinon.

(On ne vérifiera pas que la matrice passée en argument est bien carrée.)

Partie A : Etude des valeurs propres d'une matrice.

Soit L la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

5) Montrer que $\text{rg}(L - \lambda I_3) \neq 3$ si, et seulement si, $10\lambda^3 - 4\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$

Dans la suite on note $P : x \longmapsto 10x^3 - 4x^2 - 10x + 1$

6) Montrer que P' admet deux racines réelles a et b vérifiant $-1 < a < 0 < b < 1$.

7) En déduire le tableau de variations de P . *On ne calculera pas les valeurs de $P(a)$ et $P(b)$.*

8) Montrer que P admet trois racines réelles λ_1, λ_2 et λ_3 vérifiant : $-1 < \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \dfrac{2}{5} < 1 < \lambda_3 < 2$

9) Ecrire un programme Python utilisant l'algorithme de dichotomie et qui permet de calculer une valeur approchée de λ_3 à 10^{-4} près.

10) Utilisez votre calculatrice pour déterminer une valeur approchée de λ_3 à 10^{-2} près.

Vous expliquerez la démarche utilisée.

Partie B : Un premier modèle de Leslie.

On considère une population répartie en trois classes d'âge : les jeunes, les adultes jeunes et les adultes âgés.

Pour tout entier n, on note

$$X_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \\ v_n \end{pmatrix},$$

où j_n, a_n et v_n désignent respectivement les effectifs des trois classes à la génération n.

L'évolution de la population est modélisée par la relation $X_{n+1} = LX_n$, où L est la matrice de la partie A.

11) Interpréter les coefficients de L.

12) On pose dans cette question $X_0 = (100, 60, 40)$ et on note pour chaque n dans $\mathbb{N}$, $t_n = j_n + a_n + v_n$.

a) Montrer que (t_n) n'est pas constante.

b) Interpréter ce résultat.

13) a) Soit $U = (u_1, u_2, u_3)$ un vecteur non nul et λ un réel tel que $LU = \lambda U$

(U vecteur propre de L associé à λ)

Déterminer U en fonction de λ en supposant $u_2 = 1$.

b) En déduire qu'il existe un unique $V \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et un unique réel $\hat{\lambda}$ tels que :

$$v_1 > 0,\ v_2 = 1 \text{ et } v_3 > 0 \text{ et } LV = \hat{\lambda} V$$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on définit lorsque c'est possible : $X^* = \dfrac{1}{x_1 + x_2 + x_3} X$

c) Montrer que $(LV)^* = V^*$ et interpréter ce résultat vis à vis du modèle étudié.

14) On a vu dans la partie A que L possède trois valeurs propres réelles et distinctes donc on peut affirmer qu'il existe une base (U_1, U_2, U_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$LU_1 = \lambda_1 U_1 , \qquad LU_2 = \lambda_2 U_2 \qquad \text{et} \qquad LU_3 = \lambda_3 U_3$$

(où λ_1, λ_2 et λ_3 sont les réels définis dans la partie A)

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^3$ une condition initiale telle que $X_0 = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3$ avec $\alpha_3 \neq 0$

a) Démontrer, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = L^n X_0$.

b) Exprimer pour chaque entier n, X_n sur la base (U_1, U_2, U_3).

c) En déduire que la suite $\left(\dfrac{1}{\alpha_3 \lambda_3^n} X_n \right)$ converge vers U_3.

d) En utilisant la valeur approchée obtenue à la question **10)**.

A long terme, quelle est la proportion de chaque classe dans la population ?

Partie C : Autour des matrices stochastiques.

Les matrices stochastiques apparaissent d'abord comme matrices de transition des chaînes de Markov, où elles décrivent l'évolution d'une loi de probabilité. Elles sont aussi utilisées dans des modèles déterministes, par exemple pour décrire la répartition d'une population entre classes dans un modèle de Leslie conservatif.
On les retrouve enfin dans divers contextes (réseaux, algorithmes de classement, files d'attente), où elles traduisent l'idée d'une masse totale conservée et redistribuée entre plusieurs états.

On note $\mathbb{1}_n \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne de taille n ne comportant que des 1.

On appelle *matrice stochastique par lignes* une matrice carrée à coefficients réels positifs ou nuls et dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.
Autrement dit : A est stochastique par lignes si, et seulement si, $A \geqslant 0$ et $A\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n$

On appelle *matrice stochastique par colonnes* une matrice carrée à coefficients réels positifs ou nuls et dont la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1.
Autrement dit : A est stochastique par colonnes si, et seulement si, $A \geqslant 0$ et $\mathbb{1}_n^T A = \mathbb{1}_n^T$

On dit qu'une matrice est stochastique si elle l'est par lignes ou par colonnes.

Dans cette partie les matrices sont carrées et de taille $n \times n$.

15) a) En déduire que le produit de deux matrices stochastiques par lignes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'est, elle aussi.
b) En déduire que les puissances d'une matrice stochastique par lignes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le sont, elles aussi.
c) Montrer que si A est stochastique par lignes alors 1 est une valeur propre de A.

16) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A associée au vecteur propre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

(On rappelle que $X \neq 0_{n\times 1}$ et $AX = \lambda X$)

On note aussi $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$

On suppose que A est stochastique par lignes .

a) Montrer successivement que : $|\lambda|.|x_k| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} \,.\, |x_j|$, puis $|\lambda|.|x_k| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} \,.\, |x_k|$

b) En déduire que $|\lambda| \leqslant 1$.

On admet que pour cette matrice A, stochastique par lignes on a $\dim(E_1(A)) = 1$

17) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
démontrer que A et A^T ont même spectre et que pour $\lambda \in Sp(A)$, $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(A^T)$ ont même dimension.

On peut alors en déduire que les résultats de la question 16) sont aussi valables pour les matrices stochastiques par colonnes. *(on ne demande pas de le démontrer)*

On admet enfin le lemme suivant qui nous servira dans la partie D :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\text{Si } A \text{ est stochastique et vérifie } \exists m \in \mathbb{N},\ A^m > 0 \text{ alors } \begin{cases} 1 \in Sp(A) \\ \dim(E_1(A)) = 1 \\ \forall \lambda \in Sp(A) \setminus \{1\},\ |\lambda| < 1 \end{cases}$$

Partie D : Un modèle de Leslie conservatif à quatre états.

On modélise l'évolution d'une population de follicules pileux répartie en quatre états.

E_1 : follicules en repos *(phase de telogen)*,
E_2 : début de phase de croissance *(anagen précoce)*,
E_3 : croissance avancée (*anagen tardif, follicule actif*),
E_4 : phase de regression (*catagen involution*).

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $X_n = \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ x_{n,3} \\ x_{n,4} \end{pmatrix}$ le vecteur des effectifs dans chaque état à la génération n.

L'évolution des effectifs est modélisée par la relation de récurrence matricielle :

$$X_{n+1} = LX_n, \qquad L = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

18) Mise en place du modèle

a) Interpréter biologiquement les différents coefficients de la matrice L.

b) On note : $T_n = x_{n,1} + x_{n,2} + x_{n,3} + x_{n,4}$
En remarquant que L est stochastique par colonnes, montrer que (T_n) est constante.
Interpréter ce résultat.

c) On définit : $\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4 \text{ et } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \right\}$.
On interprète $\mathcal{S}$ comme l'ensemble des répartitions possibles en proportions entre les quatre états.
Montrer que si $X_0 \in \mathcal{S}$, alors $X_n \in \mathcal{S}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Justifier que $L^4 > 0$. *Indication : on pourra remarquer que L est de la forme* $\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$
où les symboles $*$ désignent des coefficients strictement positifs.

19) Répartition d'équilibre

On s'intéresse ici aux *répartitions d'équilibre*, c'est-à-dire aux vecteurs $X \in \mathcal{S}$ tels que $LX = X$.

a) Le lemme démontré à la partie C permet-il de démontrer qu'il existe une et une seule répartition d'équilibre.

b) Justifier par le calcul qu'il existe un unique vecteur d'équilibre $X^* \in \mathcal{S}$ tel que $LX^* = X^*$. On donnera les composantes de X^*.

c) Interpréter biologiquement la répartition d'équilibre X^*.

20) Convergence vers l'équilibre

Dans cette question, on se propose de montrer que le modèle converge vers la répartition d'équilibre.
On admet qu'il existe une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de L :
Il existe une base $\mathscr{B} = (U_1, U_2, U_3, U_4)$, trois complexes λ_2, λ_3 et λ_4 tels que :

$$U_1 = X^* \qquad LU_2 = \lambda_2 U_2 \qquad LU_3 = \lambda_3 U_3 \qquad LU_4 = \lambda_4 U_4$$

a) i. Quelle est la valeur propre associée à U_1 ?
ii. Justifier que $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_3| < 1$ et $|\lambda_4| < 1$
iii. En déduire U_2, U_3 et U_4 appartiennent à $\mathcal{H} = \left\{ x \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$.

b) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $X_{n+1} = LX_n$, avec $X_0 \neq 0$ et $X_0 \geqslant 0$.
On note $T_0 = x_{0,1} + x_{0,2} + x_{0,3} + x_{0,4}$ et $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de X_0 dans base $\mathscr{B}$.
i. Montrer que $T_0 \neq 0$ et expliquer ce que représente T_0 ?
ii. Montrer que $\alpha_1 = T_0$
iii. Montrer que la suite (X_n) converge vers $T_0\, X^*$. *(au sens défini à la question 1) des préliminaires*)
iv. Interpréter ce résultat d'un point de vue biologique.

Partie E : **L'informatique de la partie C.**

21) Dans un premier temps on admettra que les calculs sont exacts.

(aucune erreur d'arrondi n'est à prendre en compte)

a) Ecrire une fonction Python qui vérifie qu'une matrice est bien stochastique par lignes.

b) Ecrire une fonction Python qui vérifie qu'une matrice est bien stochastique par colonnes.

22) Reprendre la question précédente en considérant qu'un flottant x est égal à 1 si $|x-1| \leqslant 10^{-9}$.

23) Ecrire une fonction Python qui vérifie qu'une matrice P vérifie $\exists m \in \mathbb{N},\ P^m > 0$.
On admettra le résultat : si un tel m existe alors il vérifie $m \leqslant (n-1)^2 + 1$.
Dans cette question est-il utile de tenir compte des erreurs d'arrondi ?

24) Le but de cette question est de renvoyer la *proportion stable* associée à une matrice M donnée en entrée : on entend par là un vecteur propre dominant normalisé de sorte que la somme de ses composantes vaille 1.

a) On veut écrire une fonction `indice_max_module(valeurs)` qui, étant donnée une liste `valeurs` de nombres (réels ou complexes), renvoie l'indice de l'élément de la liste `valeurs` dont le module est maximal.
Écrire en Python la fonction `indice_max_module(valeurs)` en utilisant une unique boucle `for`.

b) On définit la fonction suivante :

```
def elements_dominant(M):
    valeurs, vecteurs = np.linalg.eig(M)
    k = indice_max_module(valeurs)
    lambda_dom = valeurs[k]
    U = vecteurs[:, k]
    return lambda_dom, U
```

i. Expliquer ce que renvoie la fonction `elements_dominant(M)`.

ii. Que renvoie cette fonction pour les matrices L des parties B et D ?

iii. Ecrire une fonction `vecteur_propre_dominant(M)`. qui renvoie la proportion stable associée à la matrice `M`.

— —

Annexe : Commandes Python

On suppose que les modules `math` et `numpy` sont importés via `import math as m` et `import numpy as np` .

Interprétation	Python
Transforme une liste `L` en tableau `numpy`	`np.array(L)`
Matrice nulle de taille $n \times p$	`np.zeros([n,p])`
Matrice remplie de 1 de taille $n \times p$	`np.ones([n,p])`
Coefficient d'indice (i, j) de la matrice A	`A[i, j]`
Ligne d'indice i de la matrice A	`A[i, :]`
Colonne d'indice j de la matrice A	`A[:, j]`
Taille de la matrice A	`d = np.shape(A)`
- nombre de lignes	`d[0]`
- nombre de colonnes	`d[1]`
Pour A et B matrices de tailles compatibles :	
- addition et soustraction	`A + B , A - B`
- multiplication matricielle	`np.dot(A, B)`
Valeur absolue d'un réel x	`abs(x)`
Valeur absolue d'un complexe z	`abs(z)`

```
np.linalg.eigvals(M) --- Renvoie la liste des valeurs propres de M
np.linalg.eig(M) ------- Renvoie un couple L, P où L est la liste des valeurs
                             propres de M et P la matrice de passage associée
```