Feuille_Cours_8 : Intégrales généralisées.

On soignera les interprétations graphiques pour réviser les fonctions usuelles et les représentations graphiques.

Ex 1 : Calculer si elles existent les intégrales suivantes. *(Illustrer graphiquement à chaque fois).*

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,1[}(t)\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\ e^{-2t}\,\mathrm{d}t$

7) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(t)^2\,\mathrm{d}t$

8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

9) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

10) $\displaystyle\int_{0}^{4} \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t$

11) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

12) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$

13) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln\big(t(1-t)\big)\,\mathrm{d}t$

14) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$

15) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \Big(\mathbb{1}_{]0,1[}(t)+3\times\mathbb{1}_{]2,3[}(t)\Big)\,\mathrm{d}t$

16) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$

17) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} te^{t}\,\mathrm{d}t$

18) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t$

19) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\ e^{-2t}\,\mathrm{d}t$

20) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln|t|\,\mathrm{d}t$

21) $\displaystyle\int_{0}^{1} t^n\ln(t)\,\mathrm{d}t$ *avec* $n\in\mathbb{N}$.

22) $\displaystyle\int_{-1}^{e} \ln|t|\,\mathrm{d}t$

23) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

Ex 2 : Calculer si elles existent les intégrales suivantes. *(Illustrer graphiquement à chaque fois).*

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \text{si} \quad t<0, & f(t)=e^t \\ \text{si} \quad t\geqslant 0, & f(t)=2e^{-t} \end{cases}$

2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \text{si} \quad t<0, & f(t)=te^{t^2} \\ \text{si} \quad t\geqslant 0, & f(t)=e^{-t} \end{cases}$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \text{si} \quad t<0, & f(t)=e^t \\ \text{si} \quad t\geqslant 0, & f(t)=\dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \text{si} \quad t<-1, & f(t)=\dfrac{1}{t^2} \\ \text{si} \quad -1\leqslant t\leqslant 1, & f(t)=1 \\ \text{si} \quad t\geqslant 1, & f(t)=\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$

Ex 3 : Déterminer la nature des intégrales suivantes : *(En utilisant les théorèmes de convergence)*

1) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *(indication : comparer e^{-t^2} et e^{-t} pour $t\geqslant 1$)*

2) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos^2(t)e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ *(indication : comparer $\cos^2(t)e^{-2t}$ et e^{-2t})*

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+\sin(t)+t^2}\,\mathrm{d}t$ *(indication : Justifier que :* $\displaystyle\frac{1}{2+\sin(t)+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ *)*

4) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln(t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ *(indication : comparer :* $\displaystyle -\frac{1}{\ln(t)\sqrt{t}}$ *et* $\displaystyle\frac{1}{\ln(2)\sqrt{t}}$ *)*

5) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ *(indication : Justifier que :* $\displaystyle\frac{\cos(t)}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^2}$ *)*

6) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{t}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t$ *(indication : Justifier que :* $\displaystyle\frac{t}{t^2+2t+3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ *)*

7) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^t+t}{e^{2t}+t^2+1}\,\mathrm{d}t$ *(indication : Trouver un équivalent simple en* $+\infty$*)*

8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ *(indication : Trouver un équivalent simple en* $+\infty$ *ou comparer* $\displaystyle\frac{t^2}{1+t^4}$ *et* $\displaystyle\frac{1}{t^2}$ *)*

9) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$ *(indication : Trouver un équivalent simple en* 0*)*

10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-1)^2}\,\mathrm{d}t$ *(indication : Utiliser le résultat de 1))*

11) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{t+\sqrt{t}} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t$ *(indication : Justifier que :* $\displaystyle\left(\frac{1}{t+\sqrt{t}} - \frac{1}{t+2}\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ *et* $\displaystyle\underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{t\sqrt{t}}$ *)*

12) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^t+t}{te^{2t}+1}\,\mathrm{d}t$ *(indication : trouver un équivalent simple et comparer le à* e^{-t} *pour* $t \geqslant 1$*)*

13) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{t+1}{t^3\ln(t)+1}\,\mathrm{d}t$ *(indication : trouver un équivalent simple et comparer le à* $\displaystyle\frac{1}{t^2}$ *pour* $t \geqslant e$*)*

14) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{2+e^t}{te^{2t}+t}\,\mathrm{d}t$ *(indication : trouver un équivalent simple en* 0*)*

15) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{t}+1}{t\,e^{t^2}+2}\,\mathrm{d}t$ *(indication : trouver un équivalent simple et comparer le à* e^{-t} *pour* $t \geqslant 1$*)*