Feuille_Exo_15 : Intégrales généralisées.

Ex 1 : *Intégrales de Riemann (très très classique).*

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note : $I_\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $J_\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

1) Etudier la nature de I_1 et J_1.
2) Donner, pour $\alpha \neq 1$, une primitive de la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$.
3) 1^er^ cas : Si $\alpha > 1$, Etudier la nature de I_α et J_α. Donner la valeur en cas de convergence.
4) 2^ième^ cas : Si $\alpha < 1$, Etudier la nature de I_α et J_α. Donner la valeur en cas de convergence.

En résumé (à compléter) :

	$\alpha \leqslant 0$	$0 < \alpha < 1$	$\alpha = 1$	$1 < \alpha$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$				
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$				

Dans la suite de cet exercice on pourra utiliser les résultats ci-dessus.

5) Déterminer la nature des intégrales suivantes : *(on ne demande pas le calcul de l'intégrale).*

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ 3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^t}{t^3e^t+t}\,\mathrm{d}t$ 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

6) a. Déterminer la limite de $t^2\,e^{-\sqrt{t}}$ quand t tend vers $+\infty$.

b. Rappeler, pour une fonction f définie sur $[0;+\infty[$, la définition quantifiée de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. En déduire qu'il existe un $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \geqslant A$, $e^{-\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

d. En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Ex 2 : Soient $a \in \mathbb{R}$, f une fonction continue sur $\left[a\,;+\infty\right[$ et $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = -\infty$ ou $\ell = +\infty$.

1) Montrer l'implication : si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ et que $\ell \neq 0$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
2) Enoncer la contraposée de l'implication précédente.
3) Donner un exemple d'utilisation de cette implication.

Ex 3 : Le but de cet exercice est d'établir l'existence et de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)+x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

on notera f l'intégrande de cette intégrale.

1) Montrer que $x \longmapsto \dfrac{(x-1)\ln(1-x)}{x}$ est une primitive de f sur $\left]0,1\right[$.
2) En déduire que I converge.
3) Conclure en donnant la valeur de I.

Ex 4 : Le but de cet exercice est d'établir la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{(t^4+1)\left(e^t-1-t-\frac{t^2}{2}\right)}\,\mathrm{d}t$

on notera f l'intégrande de cette intégrale.

1) a. Montrer que : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^t - 1 - t - \dfrac{t^2}{2} = 0 \iff t = 0$

On pourra pour cela étudier la fonction $t \longmapsto e^t - 1 - t - \dfrac{t^2}{2}$

b. Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

c. Que peut-on en déduire sur $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$?

2) a. Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.

b. En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

3) a. Déterminer un équivalent simple de f en $-\infty$.

b. En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

4) Conclure.