Correction de la feuille_Cours_8 : Intégrales généralisées.

Ex 1 : 1) • $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\left]-\infty;+\infty\right[$ *(L'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge si, et seulement si, } \underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}_{❶} \text{ et } \underbrace{\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}_{❷} \text{ convergent.}$$

Remarque : Comme la fonction est paire on pourrait faire plus rapide, mais ici on cherche à illustrer la définition.

❶ Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \arctan(x)\\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut : $\dfrac{\pi}{2}$

❷ Pour $x < 0$,

$$\begin{aligned}\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= -\arctan(x)\\ &\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut : $\dfrac{\pi}{2}$

En conclusion :

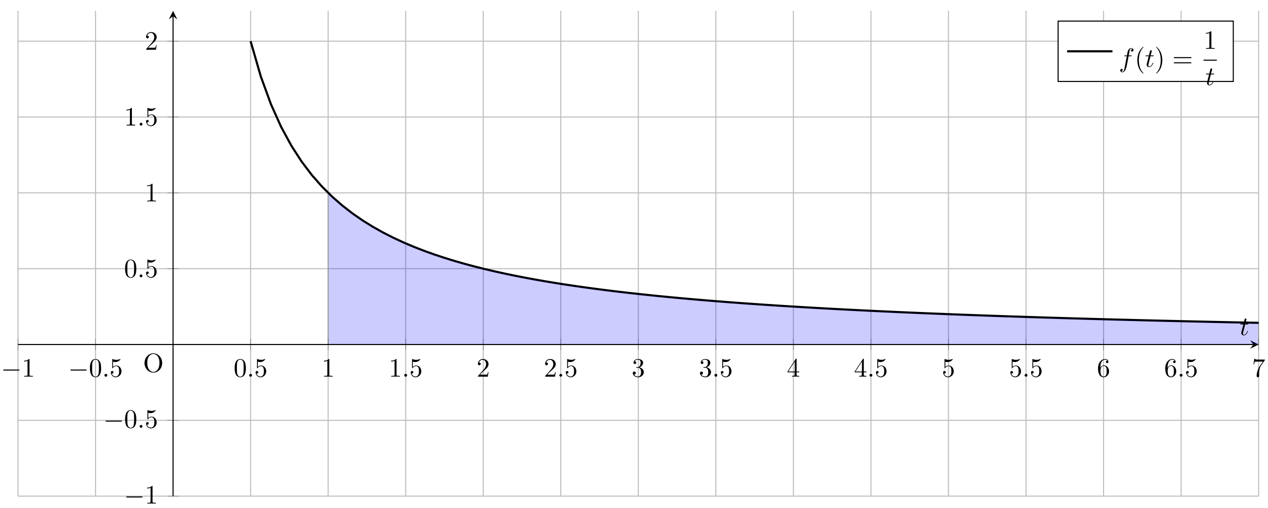
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut : } \pi}$$

2) • $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $\left[1\,;+\infty\right[$ *(L'intégrale est impropre en $+\infty$)*

• Pour $x > 1$,

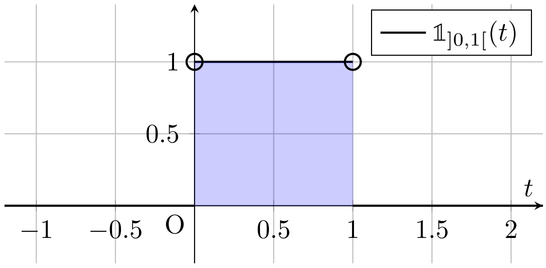
$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t &= \Big[\ln(t)\Big]_1^x\\ &= \ln(x)\\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge}}$$



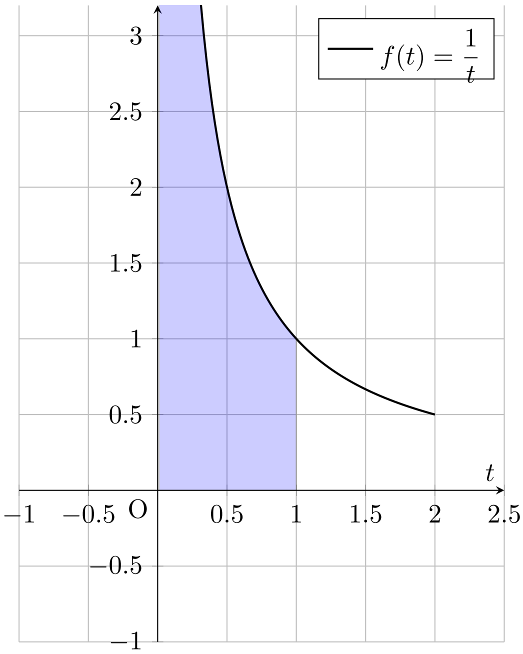
3) L'intégrande est nul en dehors de $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,1[}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t$ qui est convergente et

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,1[}(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } 1}$$



4) • $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $\left]\,0\,;1\right]$ *(L'intégrale est impropre en 0)*
• Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t &= \Big[\ln(t)\Big]_x^1 \\ &= -\ln(x) \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

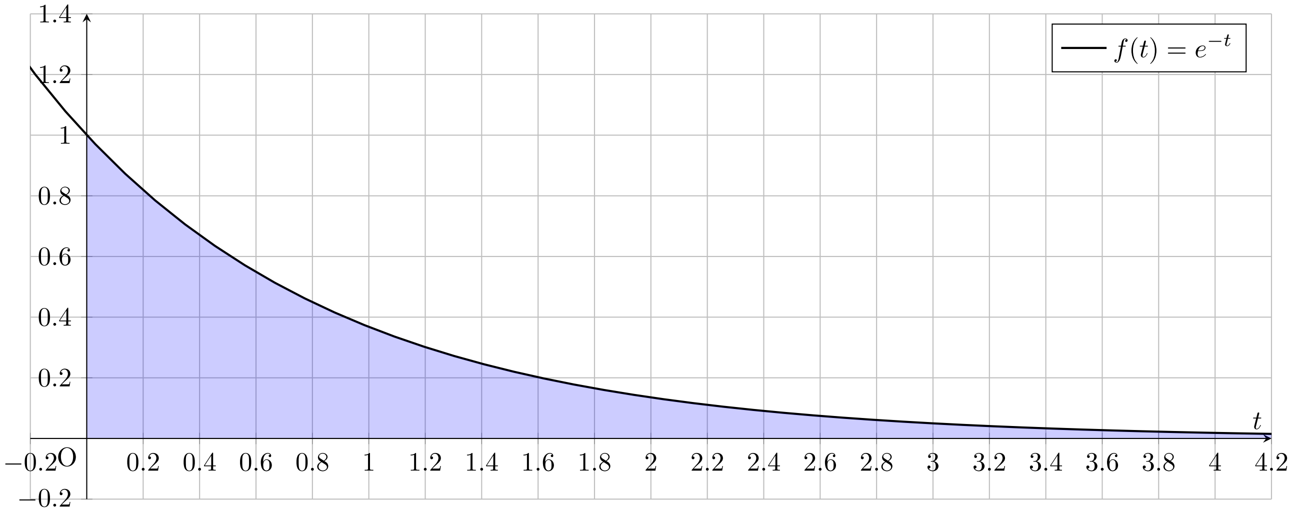


$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge}}$$

5) • $t \longmapsto e^{-t}$ est continue sur $\left[\,0\,;+\infty\,\right[$ *(L'intégrale est impropre en $+\infty$)*
• Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t &= \Big[-e^{-t}\Big]_0^x \\ &= 1 - e^{-x} \\ &\underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } 1}$$



6)

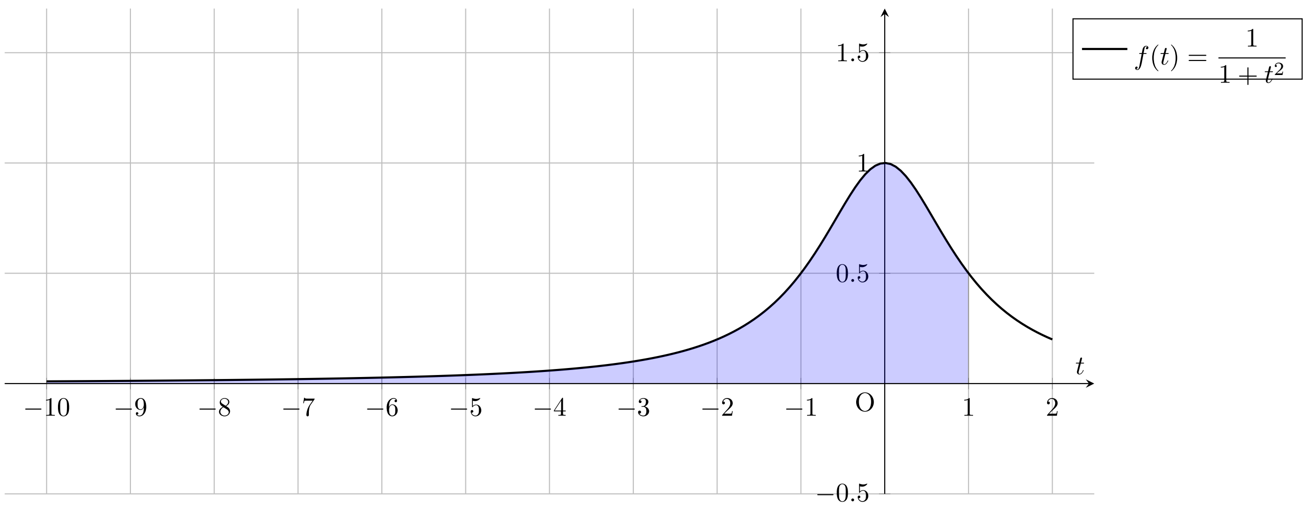
7)

8) • $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\big]-\infty;1\big]$ *(L'intégrale est impropre en $-\infty$)*

• Pour $x < 1$,

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \Big[\arctan(t)\Big]_x^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \arctan(x) \\ &\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{3\pi}{4}}$$



9)

10)

11)

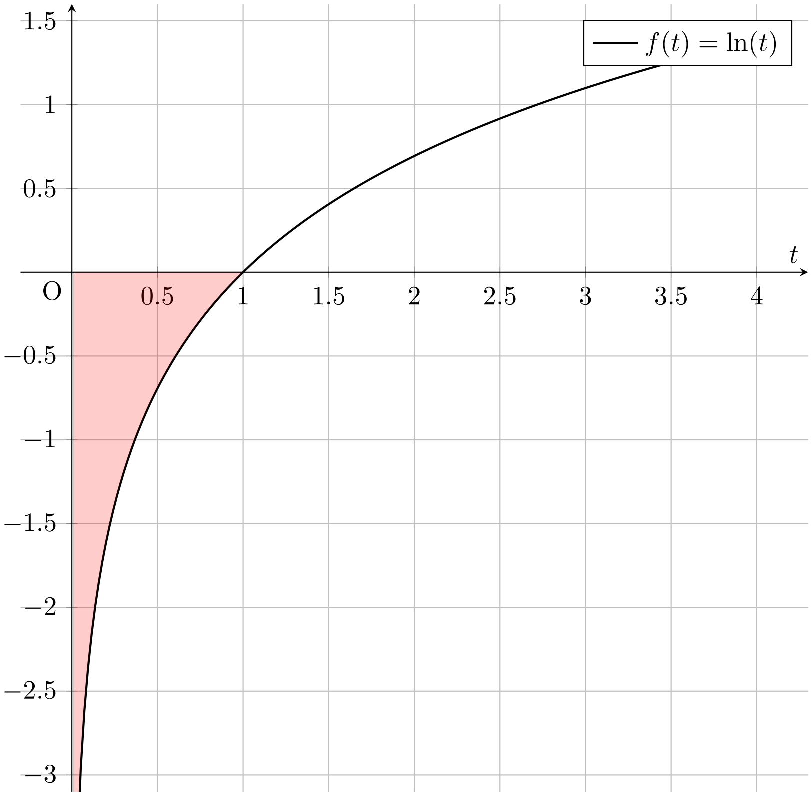
12) • $t \longmapsto \ln(t)$ est continue sur $\big]0;1\big]$ *(L'intégrale est impropre en 0)*

• Pour $x \in]0,1]$,

$$\begin{aligned} \int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[t\ln(t) - t\Big]_x^1 \\ &= -1 - x\ln(x) + x \\ &\underset{x\to0}{\longrightarrow} -1 \qquad (*) \end{aligned}$$

$(*)$ *ici on utilise une limite du cours "croissances comparées" :* $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0$

$$\boxed{\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } -1}$$



13) • $f : t \longmapsto \ln\big(t(1-t)\big)$ est continue sur $\left]0;1\right[$ *(L'intégrale est impropre en 0 et en 1)*

On remarque que $f(t) = \ln\big(t(1-t)\big) = \ln(t) + \ln(1-t)$

et on sait que $t \mapsto t\ln(t) - t$ est une primitive de ln sur $]0;+\infty[$

donc *(difficile, mais faisable pour certains d'entre-vous)*

$$F : t \mapsto t\ln(t) - t - (1-t)\ln(1-t) + (1-t) \text{ est une primitive de ln sur }]0;1[$$

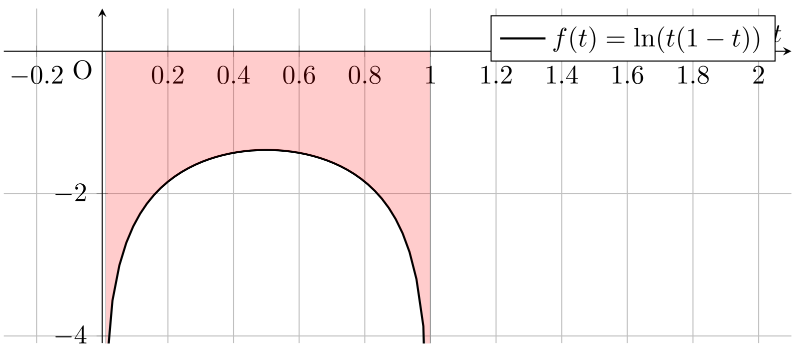
$$\int_0^1 \ln\big(t(1-t)\big)\,\mathrm{d}t \text{ converge si, et seulement si, } F \text{ admet une limite réelle en 0 et en 1.}$$

or on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ *(croissances comparées)* donc :

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1} F(x) = -1$$

En conclusion $\lim\limits_{x\to 1} F(x) - \lim\limits_{x\to 0} F(x) = -2$

$$\boxed{\int_0^1 \ln\big(t(1-t)\big)\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } -2}$$



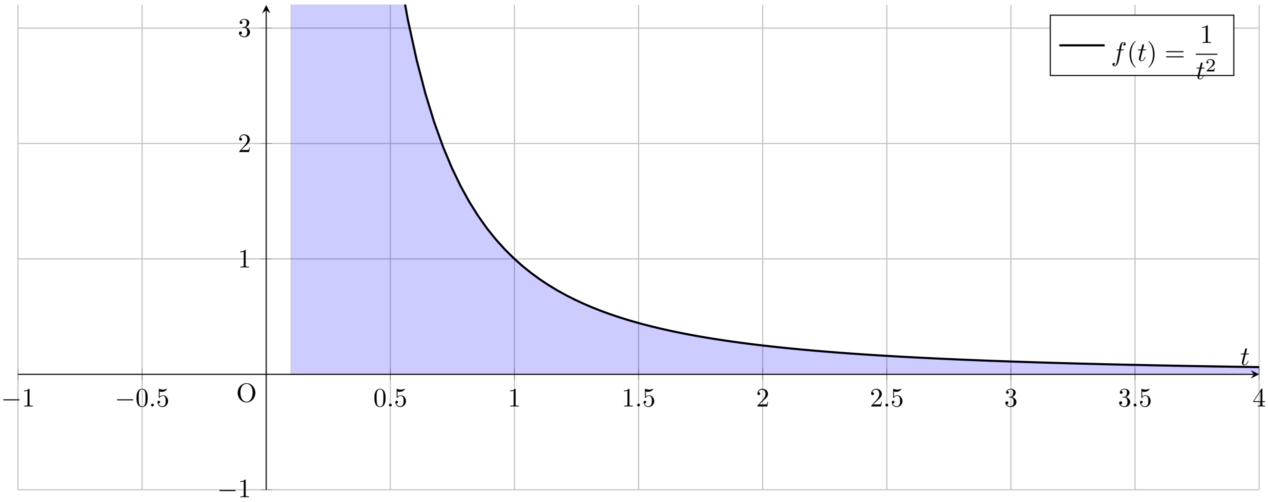
14) • $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue sur $\left]0;+\infty\right[$ *(L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$)*

et $F : t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge si, et seulement si, } F \text{ admet une limite réelle en } 0 \text{ et en } +\infty.$$

Mais $\lim\limits_{t\to 0} F(t) = +\infty$ donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ diverge}}$$



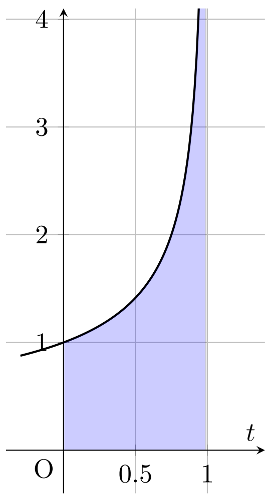
15)

16) • $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $\left[\,0\,;\,1\,\right[$ *(L'intégrale est impropre en 1)*

• Pour $x > 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t &= \Big[-2\sqrt{1-t}\Big]_1^x \\
&= 2 - 2\sqrt{1-x} \\
&\underset{x\to 1}{\longrightarrow} 2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } 2}$$



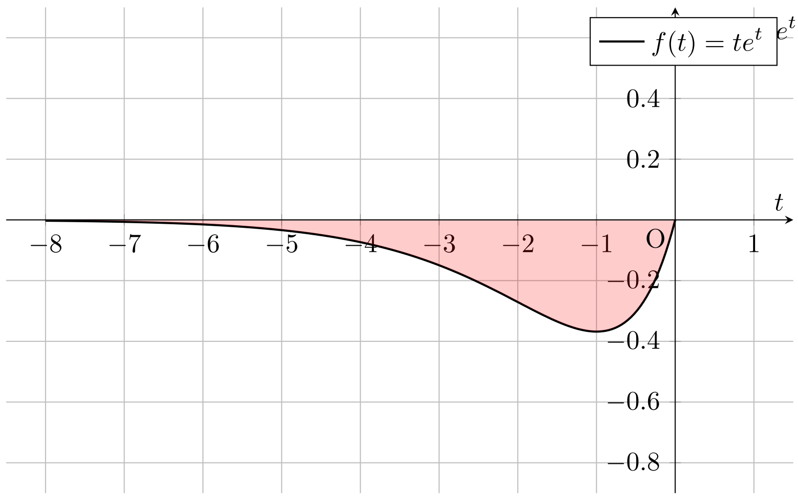
17) • $t \longmapsto te^t$ est continue sur $\left]-\infty ; 0\right]$ *(L'intégrale est impropre en $-\infty$)*

• Pour $x < 1$,

$$\begin{aligned}
\int_x^0 te^t\,\mathrm{d}t &= \Big[te^t\Big]_x^0 - \int_x^0 e^t\,\mathrm{d}t \\
&= -xe^x - 1 + e^x \qquad \textit{Intégration par parties } t\mapsto t \textit{ et } t\mapsto e^t \textit{ sont } C^1([x,0]) \\
&\underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} -1 \qquad (*)
\end{aligned}$$

$(*)$ *ici on utilise une limite du cours "croissances comparées" :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0} te^t \, \mathrm{d}t \text{ converge et vaut } -1}$$



Ex 2 :

Ex 3 : 1)

2) ❶ $\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant \cos^2(t) \leqslant 1$ et $e^{-2t} > 0$ donc

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant \cos^2(t)e^{-2t} \leqslant e^{-2t}$$

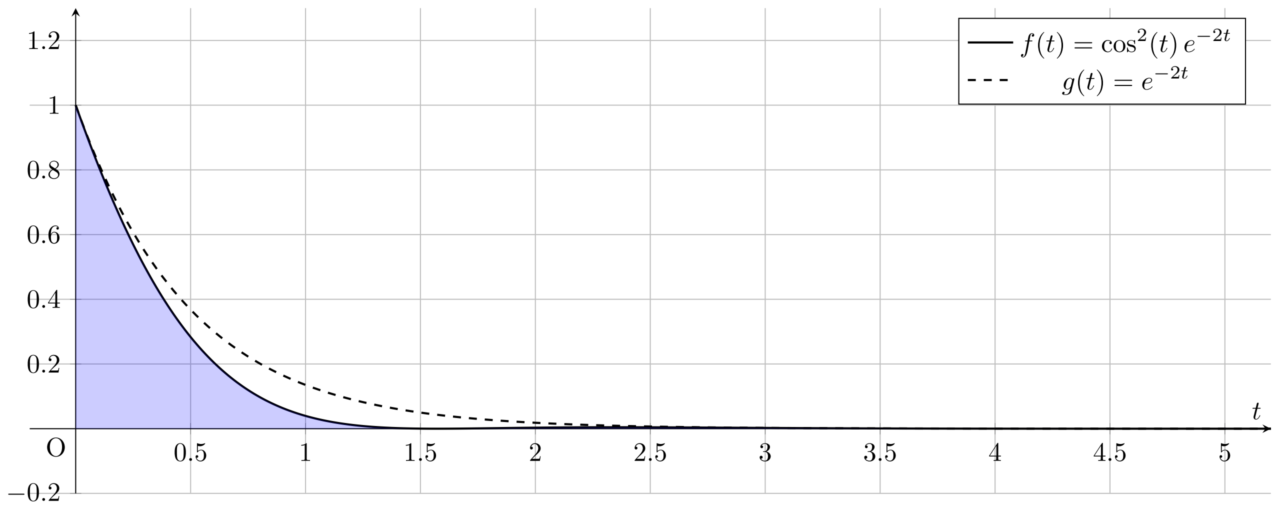
❷ les fonctions $t \longmapsto \cos^2(t)e^{-2t}$ et $t \longmapsto e^{-2t}$ sont continues sur $[\,0, +\infty[$,

❸ pour $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x e^{-2t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} \, \mathrm{d}t \text{ est convergente.}$$

donc, *(théorème de convergence pour deux intégrales par comparaison des intégrandes positifs)* :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos^2(t)e^{-2t} \, \mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$



3) La fonction $t \longmapsto \dfrac{-1}{\ln(t)\sqrt{t}}$ est continue sur $\left]0; \dfrac{1}{2}\right]$

❶ $\forall t \in \left]0; \dfrac{1}{2}\right], \quad \ln(t) \leqslant -\ln(2)$ donc pour tout $t \in \left]0; \dfrac{1}{2}\right], \quad 0 \leqslant \dfrac{-1}{\ln(t)\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{1}{\ln(2)\sqrt{t}}$

❷ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge *(Primitive de l'intégrande : $F(t) = 2\sqrt{t}$)*

donc, *(théorème de convergence pour deux intégrales par comparaison des intégrandes positifs)* :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\ln(t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}$$

En conclusion : *(linéarité)*

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln(t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

4) $f : t \mapsto \dfrac{e^t + t}{e^{2t} + t^2 + 1}$ est continue sur $[0; +\infty[$, *l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t + t}{e^{2t} + t^2 + 1}\,dt$ *est impropre en* $+\infty$.

❶

$$\begin{aligned} \frac{e^t + t}{e^{2t} + t^2 + 1} &= \frac{e^t}{e^{2t}} \times \left(\frac{1 + te^{-t}}{1 + t^2 e^{-2t} + e^{-2t}}\right) \\ &\underset{t \to +\infty}{\sim} e^{-t} \end{aligned}$$

❷ $\forall t \in [0; +\infty[, \quad e^{-t} \geqslant 0$

❸

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t &= 1 - e^{-x} \\ &\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{converge}$$

En conclusion : *(Théorème de convergence par équivalence des intégrandes positifs ou nuls)*

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^t + t}{e^{2t} + t^2 + 1}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$$