Colles de mathématiques - Semaine 14 - du 19/01/26

La colle commencera par une question de cours, les démonstrations peuvent être données en exercice.

- **Eléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.**
  Définition d'une valeur propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Définition du spectre.
  Différentes caractérisations des valeurs propres.
  Définition d'un vecteur propre d'un endomorphisme, d'une matrice.
  Définition du sous-espace propre (noté $E_\lambda(f)$ ou $E_\lambda(M)$).
  Lien entre la dimension de $E_\lambda(M)$ et du rang de $M-\lambda I_n$.
  Spectre d'une matrice triangulaire.
  En dimension finie :
  Liens entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux d'une matrice qui le représente dans une base.

  Nous n'avons pas encore vu qu'en dimension n, il y a au plus n valeurs propres.
  Nous n'avons pas encore vu la liberté des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

- **Révisions : Intégrales d'une fonction continue sur un segment.**
  Somme de Riemann, linéarité, relation de Chasles, croissance de l'intégrale, primitives,
  Théorème fondamental de l'Analyse.
  Parité, périodicité et intégration.
  Intégration par parties.
  Changement de variable de classe C^1. (Doit être donné sauf dans le cas affine.)

- **Intégrales généralisées.**
  Convergence d'une intégrale impropre pour une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert.
  Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité en un point.
  Cas d'une fonction continue sur un intervalle sauf éventuellement en un nombre fini de points.
  Propriétés. Linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance, stricte positivité.
  Cas des fonctions paires et des fonctions impaires.
  Théorème de convergence par comparaison pour deux fonctions positives ou nulles f et g telles que $f \leqslant g$.
  Théorème de convergence pour deux fonctions positives ou nulles f et g telles que $f \sim g$.

  Nous n'avons pas encore vu l'absolue convergence. Ni l'intégrale des densités usuelles
  Nous n'avons pas encore vu les théorèmes d'intégration par parties et de changement de variable dans ce cadre.

- **Python.**
  Module `numpy`, incluant le sous-module `linalg` avec les fonctions `eig` et `eigvals`

- On commencera par la recherche du spectre et de bases des sous espaces propres d'une matrice 2×2 ou 3×3.

- On poursuit par le calcul ou la nature d'une intégrale impropre.

- On passera aux endomorphismes uniquement si sur les matrices le cours est maitrisé.

- Exercices classiques : *(Savoir faire les démonstrations.)*
  A et A^T ont même spectre et pour chaque valeur propre λ, $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda(A^T))$
  si A et B sont semblables alors elles ont même spectre et pour chaque valeur propre λ, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B)$
  si les sommes de chaque ligne de M sont égales à une même constante c alors c est une valeur propre de M.
  si $P(M) = 0_{n\times n}$ alors les valeurs propres de M sont des racines de P.

- Ecrire une fonction qui renvoie `True` si une matrice est carrée, (symétrique ou triangulaire ...) et `False` sinon.