Correction de la feuille_Exo_15 : Intégrales généralisées.

Ex 1 : *Intégrales de Riemann*

Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]\,0\,;+\infty[$,

1) Si $\alpha = 1$,

la fonction $F_1 : t \mapsto \ln(t)$ est une primitive de f_1 sur $]\,0\,;+\infty[$.

$$\text{de plus} \quad \lim_{t\to 0} F_1(t) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty} F_1(t) = +\infty$$

$$\text{donc} \quad \boxed{\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{sont divergentes}}$$

2) Si $\alpha \neq 1$,

$$\boxed{\text{la fonction } F_\alpha : t \mapsto \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ est une primitive de } f_\alpha \text{ sur }]\,0\,;+\infty[}$$

3) 1^er^ cas : Si $\alpha > 1$, $(1-\alpha < 0)$

$$\text{sous cette condition :} \quad \lim_{t\to 0} F_\alpha(t) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} F_\alpha(t) = 0 \quad \text{et} \quad F_\alpha(1) = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\boxed{\text{Quand } \alpha > 1, \quad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge avec } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}}$$

4) 2^ième^ cas : Si $\alpha < 1$, $(1-\alpha > 0)$

$$\text{sous cette condition :} \quad \lim_{t\to 0} F_\alpha(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} F_\alpha(t) = +\infty \quad \text{et} \quad F_\alpha(1) = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\boxed{\text{Quand } \alpha < 1, \quad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ diverge avec } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}}$$

On résume les résultats dans le tableaux suivants (Avec CV et DV).

	$\alpha \leqslant 0$	$0 < \alpha < 1$	$\alpha = 1$	$1 < \alpha$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$	CV	CV	DV	DV
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$	DV	DV	DV	CV