Feuille_Cours_8_2 : Propriétés des intégrales convergentes.

Ex 1 : 1) Calculer si elle existe l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln(t) + \frac{1}{\sqrt{1-t}}\right) \mathrm{d}t$

2) Etudier la nature puis calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t^{k+1}}\right) \mathrm{d}t.$

(on rappelle que pour $k \geqslant 1$, $t \longmapsto -\dfrac{1}{kt^k}$ est une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{k+1}}$ sur $]0;+\infty[$)

Ex 2 : 1) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

On suppose que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Simplifier les calculs suivants :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_{-1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2) On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{si } x < -1,\ f(x) = \frac{2}{1+x^2}, \quad \text{si } x \in [-1;0],\ f(x) = 1 \quad \text{et si } x > 0,\ f(x) = e^{-x}$$

a. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

c. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

Ex 3 : En admettant que toutes les intégrales suivantes existent, donnez si possible leur signe (au sens large).

(N'hésitez à dire : "je ne sais pas")

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \ln^3(t)\,\mathrm{d}t$ 3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{|t-1|^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ 4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{3-2t+t^2}\,\mathrm{d}t$

Ex 4 : Justifier que les intégrales suivantes sont strictement positives ou strictement négatives.

(on admet qu'elles convergent)

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, e^{-t^3}\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_0^1 (2t-1)\ln^3(t)\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(t)\, \sin^8(t)\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{3-2t+t^2}\,\mathrm{d}t$

Ex 5 : 1) On suppose que f est continue sur $[0,+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f(x)-x^2\right)^2 \mathrm{d}x = 0$ *(converge et vaut 0).*

En déduire une expression de $f(x)$ pour x dans l'intervalle $[0,+\infty[$.

2) Donner l'exemple de deux fonctions définies sur $[0,+\infty[$ et qui vérifient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f(x)-x^2\right)^2 \mathrm{d}x = 0.$

Ex 6 : 1) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

2) Justifier que pour tout $t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{2t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

3) En déduire un encadrement de : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

Ex 7 : On admet l'existence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1) Justifier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$

2) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 2+\frac{2}{e}$.

3) *(Pour les 5/2)* Quelle est la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$?

Ex 8 : Calculer si possible les intégrales suivantes en utilisant la parité de la fonction intégrée.

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{|t|}}{t}\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\,dt \qquad (a>0)$

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}\,(1-t)}\,dt$

7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2+1}\,dt$

8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\,dt$

10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|t|\,dt$

11) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{t}\,dt$

12) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$