BCPST 2_A 2025/2026

Feuille_Cours_8_3 : Intégrales généralisées.

Ex 1 : Les intégrales suivantes sont-elles absolument convergentes ?

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ 3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t^3-2t)e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$

Ex 2 : Soit f une fonction continue sur $]a,b[$,

1) Exprimer f en fonction de $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \min(f,0)$.
2) Montrer que pour tout réel $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}|x-y|$
3) En déduire que les fonctions f^+ et f^- sont continues sur $]a,b[$.
4) Démontrer le théorème ACV $\Rightarrow$ CV dans le cas d'une fonction continue sur $]a,b[$.

Ex 3 : Montrer que la convergence des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin(5t)e^{-5t}\,\mathrm{d}t$ 2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ 3) $\displaystyle\int_{0}^{1} \cos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

Ex 4 : Donner la nature des intégrales impropres suivantes et donner si possible la valeur de l'intégrale en cas de convergence :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^2e^{-2t}\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

Ex 5 : Etudier la suite (I_n) définie par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$. *(On montrera l'existence de ces intégrales)*

Ex 6 : Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. *(On fera le changement de variable $y=\sqrt{2t}$).*

Ex 7 : On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

1) Montrer que : quels que soient $\mu\in\mathbb{R}$ et $\sigma\in\mathbb{R}_+^*$,

l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t = \sigma\sqrt{2\pi}$.

Vous devrez connaitre ce résultat.

2) Convergence et calcul des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 2) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-2\,t^2}\,\mathrm{d}t$ 3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-3)^2}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t-\mu)^2}\,\mathrm{d}t$ *(avec $a>0$)* 5) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$ 6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} e^{-(t-2)^2}\,\mathrm{d}t$

Ex 8 : Nature et calcul de : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|2t+1|}\,\mathrm{d}t$ *(on commencera par un changement de variable affine)*

Ex 9 : Convergence et calcul de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Indication : On cherchera une primitive par une intégration par parties.

Ex 10 : *Classique (MCR 2021) (Loi du χ^2 à deux degrés de liberté)*

Soit x un réel strictement positif,

1) montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

(*on utilisera le changement de variable affine* $t = xu$)

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ est convergente et la calculer.

(*on utilisera le changement de variable* $t=\cos^2(x)$)

Ex 11 : Extrait du programme : *Les intégrales semi-convergentes sont hors-programme.*

Retour sur les séries numériques :

Donner un exemple usuel de série convergente et non absolument convergente.

On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) **Convergence**

a. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

b. Montrer que pour $x \geqslant \dfrac{\pi}{2}$, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos(x)}{x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

c. Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

d. En déduire la nature de I.

2) **Absolue convergence**

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t = 2$

b. En déduire que pour tout entier n non nul : $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}$

c. Rappeler la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$

d. En déduire que I n'est pas absolument convergente.