Correction du sujet A

Lundi 19 Janvier

1) $f : t \mapsto \ln(t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0,2]$ et $F : t \mapsto t\ln(t) - t$ est une primitive de f sur $]0,2]$.

$$\begin{cases} \lim_{0} F = 0 & \text{car } \lim_{t \to 0} (t \ln t) = 0 \text{ Croissances comparées} \\ F(2) = 2\ln(2) - 2 & \end{cases}$$

Donc $\boxed{\int_0^2 \ln(t)\,dt \text{ converge et vaut } 2\ln(2) - 2}$

2) la fonction intégrée est nulle sur $]-\infty ; 1[$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)\, e^{-2t}\,dt = \int_1^{+\infty} e^{-2t}\,dt$$

(même nature et $=$ si CV)

Pour $x \in [1, +\infty[$,

$$\int_1^x e^{-2t}\,dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-2t}\right]_1^x = -\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{2} e^{-2}$$

Donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)\, e^{-2t}\,dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{2} e^{-2}}$

2) $t \mapsto t e^{-t}$ est continue sur $[0,1]$ (l'intégrale converge).

$t \mapsto t$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par intégration par parties on obtient

$$\int_0^1 t e^{-t}\,dt = \left[t(-e^{-t})\right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-t})\,dt$$

$$= -\frac{1}{e} + 0 - \left[e^{-t}\right]_0^1$$

$$\boxed{\int_0^1 t e^{-t}\,dt = 1 - \frac{2}{e}}$$

4) $\boxed{\text{Si } f \text{ est continue sur l'intervalle } I \text{ et } a \text{ est un réel de } I \text{ alors } x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.}$

5) • $\boxed{\text{si } \alpha = 1 : t \mapsto \ln(t)}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0 ; +\infty[$.

• $\boxed{\text{si } \alpha \neq 1 \quad t \mapsto \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $]0 ; +\infty[$

6)
$$\begin{cases} \frac{t}{t^3+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}, & \frac{1}{t^2} \geq 0 \\ \text{et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \text{ converge} & \left(\text{En effet } F(t) = -\frac{1}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0\right) \end{cases}$$

donc (th de convergence) $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}\,dt \text{ converge}}$

7) $t \mapsto \cos(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \underset{t = \cos(x)}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \cos^2(x)}\,(-\sin(x))\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx \quad (\sin(x) \geq 0 \text{ sur } [0, \tfrac{\pi}{2}])$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2x)}{2}\,dx$$

or $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

Donc $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$

et $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est paire donc

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}}$$

8) La fonction est nulle en dehors de $[-1,1]$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\, t^2\,dt = \int_{-1}^{1} t^2\,dt \text{ (qui converge)}$$
$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{2}{3}$$

9)

$$\begin{cases} \forall t \in [1,+\infty[, \quad 0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{2+\sin(t)}{t} \\ \text{et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt \text{ diverge} \quad \left(F(t) = \ln(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty\right) \end{cases}$$

donc (théorème de comparaison)

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin(t)}{t}\,dt \text{ diverge}}$$

10) $f : t \mapsto \frac{t}{(2+t^4)^2}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et impaire.

$$\begin{cases} \frac{t}{(2+t^4)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^7} \quad \forall t \geq 1 \quad \frac{1}{t^7} \geq 0 \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^7}\,dt \text{ converge} \end{cases}$$
$$\left(F(t) = -\frac{1}{6t^6} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

et comme f est impaire

donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(2+t^4)^2}\,dt \text{ converge et vaut } 0}$

Correction du sujet B Lundi 19 janvier 2026

1) $f : t \longmapsto \dfrac{2}{\sqrt{t}}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0,1]$ et $F : t \mapsto 4\sqrt{t}$ est une primitive de f sur $]0,1]$.

or $\begin{cases} \lim\limits_{0} F = 0 \\ F(1) = 4 \end{cases}$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt \text{ converge et vaut } 4}$

2) Si f est une fonction continue sur un intervalle I et a est un réel de I alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur I

3) $t \mapsto t^2 \ln(t)$ est continue sur $[1,2]$ donc l'intégrale converge

$t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$ et $t \mapsto \ln t$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$ donc (IPP)

$$\int_1^2 t^2 \ln(t)\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{t^3}{3}\times\frac{1}{t}\,dt$$

$$= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{9}\left[t^3\right]_1^2$$

$$\boxed{\int_1^2 t^2 \ln(t)\,dt = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}}$$

4) la fonction intégrée est nulle sur $]-\infty;1[$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{]-\infty;1]}(t)\, e^{-3t}\,dt = \int_1^{+\infty} e^{-3t}\,dt$$

(même nature et égales en cas de cv)

Pour $x \in [1;+\infty[$,

$$\int_1^x e^{-3t}\,dt = \left[-\frac{1}{3}e^{-3t}\right]_1^x$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-3}$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{3}e^{-3}$$

En conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{]-\infty;1]}(t)\, e^{-3t}\,dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{3}e^{-3}}$

5) (Voir la correction du sujet A)

6) la fonction intégrée est nulle en dehors de $[0,2]$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,2]}(t)\, t^2\,dt = \int_0^2 t^2\,dt \quad \text{(qui converge)}$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \boxed{\frac{8}{3}}$$

7) (Voir la correction du sujet A)

8) $t \longmapsto \dfrac{e^{-3t}}{e^{-t}+1}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0;+\infty[$.

$$\begin{cases} \dfrac{e^{-3t}}{e^{-t}+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-3t} \qquad e^{-3t} \geq 0 \\ \text{et } \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3t}\,dt \text{ converge (intégrale usuelle)} \end{cases}$$

donc (théorème de convergence)

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}}{e^{-t}+1}\, dt \quad \text{converge}}$$

9) $\begin{cases} \forall t \in [1;+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{2+\cos(t)}{t} \\ \text{et } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt \text{ diverge} \quad \left(F(t) = \ln(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \right) \end{cases}$

donc (théorème de convergence)

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(t)}{t}\, dt \quad \text{converge}}$$

10) $f : t \longmapsto \dfrac{t}{(2+|t|^3)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire

$\begin{cases} \dfrac{t}{(2+|t|^3)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^5}, \quad \forall t \geqslant 1\ \dfrac{1}{t^5} \geqslant 1 \\ \text{et } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^5}\, dt \text{ converge} \end{cases}$

(En effet : $F(t) = -\dfrac{1}{4t^4} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$)

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge

et comme f est impaire,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(2+|t|^3)^2}\, dt = 0}$$