BCPST 2$_A$

Correction du devoir surveillé du 10 janvier 2026

Quelques définitions et résultats préliminaires.

1) a) *Raisonnons par double-implication* :

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $\left(||X_n||_1\right)$ tend vers 0,

Comme les modules sont positifs, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $|x_{n,i}| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |x_{n,j}|$ ce qui donne

$$0 \leqslant |x_{n,i}| \leqslant ||X_n||_1$$

or $\left(||X_n||_1\right)$ tend vers 0 donc *(th. des gendarmes)* $\lim_{n\to+\infty} |x_{n,i}| = 0$

$$\text{donc pour tout } i \in [\![1,p]\!],\ \lim_{n\to+\infty} x_{n,i} = 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} x_{n,i} = 0$,

on a alors pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} |x_{n,i}| = 0$ et par limite d'une somme on en déduit $\left(\sum_{i=1}^{p} |x_{n,i}|\right)$ converge vers 0 ou encore $\left(||X_n||_1\right)$ tend vers 0.

En conclusion :

$$\boxed{\left(||X_n||_1\right) \text{ tend vers 0 si, et seulement si, pour tout } i \in [\![1,p]\!],\ \lim_{n\to+\infty} x_{n,i} = 0}$$

b) On suppose que pour un $\alpha \in [0,1[$ on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||X_{n+1}||_1 \leqslant \alpha ||X_n||_1$ $(*)$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||X_n||_1 \leqslant \alpha^n ||X_0||_1$

Pour $n = 0$ on a clairement $||X_0||_1 \leqslant \alpha^0 ||X_0||_1$ et si pour un entier n $||X_n||_1 \leqslant \alpha^n ||X_0||_1$ alors avec $(*)$ on en déduit que $||X_{n+1}||_1 \leqslant \alpha^{n+1} ||X_0||_1$ On a établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant ||X_n||_1 \leqslant \alpha^n ||X_0||_1$$

Sachant que $\alpha \in [0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$ et ainsi *(par encadrement)* $\left(||X_n||_1\right)$ tend vers 0

$$\boxed{\text{S'il existe } \alpha \in [0,1[\text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N},\ ||X_{n+1}||_1 \leqslant \alpha ||X_n||_1 \text{ alors } (X_n) \text{ converge vers } 0_{\mathbb{R}^p}}$$

2) C'est juste un calcul de somme :

```
def norme_1(u):
    S = 0
    for x in u:
        S += abs(x)
    return S
```

Matrice à diagonale strictement dominante.

3) $\boxed{M_2 \text{ et } M_3 \text{ sont les seules matrices à diagonale strictement dominante}}$

4)
```
def diago_dominante(A):
    n, p = np.shape(A)                      # on ne vérifie pas que n = p
    for i in range(n):
        S = 0
        for j in range(n):
            S += abs(A[i, j])
        if abs(M[i, i]) <= S - abs(M[i, i]):   # Cette condition est équivalente à $(*)$
            return False
    return True
```

$$(*) \text{ est } |a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} |a_{ij}|$$

Partie A : Etude des valeurs propres d'une matrice.

5)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rg}(L-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2-5\lambda \end{pmatrix} && \begin{array}{l} 2L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow 5L_3 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 2-2\lambda^2 & 1 \\ 0 & 3 & 2-5\lambda \end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 2-2\lambda^2 & 1 \\ 0 & F(\lambda) & 0 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - (2-5\lambda)L_2 \\
& \qquad (\textit{où}\ \ F(\lambda) = 3-(2-5\lambda)(2-2\lambda^2) = -10\lambda^3+4\lambda^2+10\lambda-1 \\
&= \mathrm{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 1 & 2-2\lambda^2 \\ 0 & 0 & F(\lambda) \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire}} && C_3 \leftrightarrow C_2
\end{aligned}
$$

donc $\quad \mathrm{rg}(M_5-\lambda I_3) < 3$ si, et seulement si, $F(\lambda)=0$

$$\boxed{\mathrm{rg}(L-\lambda I_3) \neq 3 \text{ si, et seulement si, } 10\lambda^3-4\lambda^2-10\lambda+1=0}$$

6) Le polynôme P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 30x^2-8x-10$

- $P'(-1)=16>0$, $P'(0)=-10<0$ et P' est continue sur l'intervalle donc $\exists a \in]-1,0[$: $P'(a)=0$.
- $P'(0)=-10<0$, $P'(1)=16>0$ et P' est continue sur l'intervalle donc $\exists b \in]0,1[$: $P'(b)=0$.

$$\boxed{P' \text{ admet deux racines réelles } a \text{ et } b \text{ vérifiant } -1<a<0<b<1}$$

7) P' est un trinôme de coefficient dominant positif donc on connait son signe et ainsi les variations de P.
De plus $P(x) \underset{-\infty}{\sim} 30x^2 = -\infty$ et $P(x) \underset{+\infty}{\sim} 30x^2 = +\infty$
On a ainsi le tableau de variations de P :

x	$-\infty$	-1	a	0	$\frac{2}{5}$	b	1	2	$+\infty$
$P'x)$		$+$	0	-		0	$+$		
P	$-\infty$	-3	$P(a)>0$	1	-3	$P(b)<0$	-3	45	$+\infty$

8) On remarque que $P(0)=1>0$ donc les variations de P permettent d'affirmer que $P(a)>0$.
De plus $P\left(\frac{2}{5}\right) = -3$, $\ P(1)=-3\ $ et $\ P(2)=45$
(On applique à P le théorème des valeurs intermédiaires)

- P est continue et change de signe entre -1 et a donc il existe une racine de P dans $]-1;a[$
- P est continue et change de signe entre 0 et $\frac{2}{5}$ donc il existe une racine de P dans $\left]a;\frac{2}{5}\right[$
- P est continue et change de signe entre 1 et 2 donc il existe une racine de P dans $]1;2[$

$$\boxed{P \text{ admet trois racines réelles } \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ et } \lambda_3 \text{ vérifiant : } -1<\lambda_1<0<\lambda_2<\frac{2}{5}<1<\lambda_3<2}$$

9)
```
def f(x):
    return 10*x**3 - 4*x**2 - 10*x + 1

a, b, eps = 1, 2, 10**-4
while b-a > eps:
    c =(a+b)/2
    if f(c) < 0:        # ici f est croissante, f(a) < 0
        a = c
    else:
        b = c
print(c)
```

10) Je trace la courbe et je localise la racine puis je calcule $P(1{,}17) < 0$ et $P(1{,}18) > 0$

$$\boxed{\lambda_3 \approx 1{,}17}$$

Partie B : Un premier modèle de Leslie.

$$\begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

11) On interprète les coefficients de la matrice L comme des taux de transition et de fécondité entre deux générations.
• A la première ligne : le jeunes adultes donnent en moyenne naissances à deux jeunes et les adultes agés à un jeune.
• A la deuxième ligne : La moitié des jeunes deviennent jeunes adultes (La moitié des jeunes sortent du modèle) aucun jeune adulte ne reste dans cette classe.
• A la troisième ligne : 60% des jeunes adultes survivent et deviennent âgés, 40% des adultes âgés survivent.

12) On pose dans cette question $X_0 = (100, 60, 40)$ et on note pour chaque n dans $\mathbb{N}$, $t_n = j_n + a_n + v_n$.

a) $t_0 = j_0 + a_0 + v_0 = 100 + 60 + 40 = 200$ et $t_1 = j_1 + a_i + v_i = 160 + 50 + 52 = 262 > 200$

donc $\boxed{(t_n) \text{ n'est pas constante}}$

b) t_n représente l'effectif total de la population à la génaration n.
(t_n) n'est pas constante signifie que cet effectif varie entre les générations.

13) a) Soit $U = (u_1, u_2, u_3)$ un vecteur non nul et λ un réel tel que $LU = \lambda U$

Nécessairement λ est une valeur propre de L et U vérifie le système : $\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 2-2\lambda^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(Grâce au calcul sur le rang de la question 5))

Si on impose $u_2 = 1$, il vient : $\boxed{U = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 1 \\ 2(\lambda^2 - 1) \end{pmatrix}}$

Remarque : d'autres expression sont possibles en particulier pour u_3.

b) Pour avoir un vecteur propre U avec $u_2 = 1$ et $u_1 > 0$ et $u_3 > 0$ on a nécessairement $\boxed{\hat{\lambda} = \lambda_3}$
et alors la question précédente montre qu'il y a un unique vecteur propre associé vérifiant $u_2 = 1$.

$\boxed{\text{il existe un unique } V \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ et un unique réel } \hat{\lambda} \text{ tels que : } v_1 > 0,\ v_2 = 1 \text{ et } v_3 > 0 \text{ et } LV = \hat{\lambda} V}$

c)

$$\begin{aligned} (LV)^* &= (\hat{\lambda} V)^* \\ &= \frac{1}{\hat{\lambda} v_1 + \hat{\lambda} v_2 + \hat{\lambda} v_3} \begin{pmatrix} \hat{\lambda} v_1 \\ \hat{\lambda} v_2 \\ \hat{\lambda} v_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} v_1 + \hat{\lambda} v_2 + \hat{\lambda} v_3} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{v_1 + v_2 + v_3} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{(LV)^* = V^*}$$

Interprétation : Les composantes de V^* représentent les proportions des différentes classes.
$(LV)^* = V^*$ signifie que si la population initiale est V alors à chaque génération l'effectif de chaque classe est multiplié par λ_3 et mais les proportions entre classes restent inchangées.

$$\boxed{V^* \text{ est une répartition stable du modèle}}$$

14) a) Montrons, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = L^n X_0$.

- Pour $n = 0$,

  $L^0 = I_3$ donc on a bien $X_0 = L^0 X_0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = L^n X_0$,

  on a $X_n = L^n X_0$ et $X_{n+1} = LX_n$ donc $X_{n+1} = L^{n+1} X_0$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = L^n X_0}$$

b)

$$\begin{aligned} X_n &= L^n X_0 \\ &= L^n (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3) \\ &= \alpha_1 L^n U_1 + \alpha_2 L^n U_2 + \alpha_3 L^n U_3 \end{aligned}$$

et comme ce sont des vecteurs propre de L il vient :

$$\boxed{X_n = \alpha_1 \lambda_1^n U_1 + \alpha_2 \lambda_2^n U_2 + \alpha_3 \lambda_3^n U_3}$$

c) $\alpha_3 \neq 0$ donc l'égalité précédente donne :

$$\begin{aligned} \left|\left| \frac{1}{\alpha_3 \lambda_3^n} X_n - U_3 \right|\right|_1 &= \left|\left| \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^n U_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^n U_2 \right|\right|_1 \\ &\leqslant |\alpha_1| \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right|^n ||U_1||_1 + |\alpha_2| \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right|^n ||U_2||_1 \end{aligned}$$

or $\left|\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\right| < 1$ donc

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{1}{\alpha_3 \lambda_3^n} X_n\right) \text{ converge vers } U_3}$$

d) A long terme on a la répartition $U_3^* = V^* = \dfrac{1}{2\lambda_3 + 1 + 2(\lambda_3^2 - 1)} \begin{pmatrix} 2\lambda_3 \\ 1 \\ 2(\lambda_3^2 - 1) \end{pmatrix}$

En prenant la valeur approchée de λ_3, on obtient à long terme la répartition :

$$\boxed{\text{57\% de jeunes, 24\% d'adultes jeunes et 19\% d'adultes agés}}$$

Partie C : Autour des matrices stochastiques.

15) a) Soient A et B deux matrices stochastiques par lignes,

- d'une part : on a $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$ donc $(AB)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \geqslant 0$ et ainsi $AB \geqslant 0$
- d'autre part : $AB\mathbb{1}_n = A\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n$

donc AB est stochastique.

$$\boxed{\text{le produit de deux matrices stochastiques par lignes de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ l'est, elle aussi}}$$

b) Soient A une matrice stochastique par lignes,
$A^0 = I_n$ qui est stochastique et si pour un entier k, A^k l'est alors d'après 15)a) A^{k+1} l'est aussi,

on a bien *(Récurrence)* :

$$\boxed{\text{Les puissances d'une matrice stochastique par lignes de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ le sont, elles aussi}}$$

c) si A est stochastique par lignes alors $A\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n$
donc comme $\mathbb{1}_n \neq 0_n$ on a bien $1 \in Sp(A)$.

$$\boxed{\text{si } A \text{ est stochastique par lignes alors 1 est une valeur propre de } A}$$

16) a) $AX = \lambda X$ donc $(AX)_k = \lambda X_k$ donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j = \lambda x_k$

En passant au module on a :

$$\begin{aligned}
|\lambda|.|x_k| &= \left|\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j\right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}x_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\,|x_j| \qquad \textit{car les } a_k \textit{ sont des réels positifs} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\,|x_k| \qquad \textit{car en plus } |x_k| \textit{ est le plus grand des } |x_j|
\end{aligned}$$

$$\boxed{|\lambda|.|x_k| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\,.\,|x_k|}$$

b) On a $X \neq 0_{n\times 1}$ donc $|x_k| > 0$ et ainsi l'inégalité précédente donne $|\lambda| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}$

or A est stochastique par lignes donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 1$

ce qui donne :

$$\boxed{|\lambda| \leqslant 1}$$

17) • Soit $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda\, I_n) &= \mathrm{rg}\Big((A - \lambda\, I_n)^\top\Big) \\
&= \mathrm{rg}(A^T - \lambda\, I_n^T) \\
&= \mathrm{rg}(A^T - \lambda\, I_n)
\end{aligned}$$

ainsi : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \mathrm{rg}(A - \lambda\, I_n) < n \iff \mathrm{rg}(A^T - \lambda\, I_n) < n \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(A^T)$

donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)}$

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ $\big(= \mathrm{Sp}(A^\top)\big)$,

$$\begin{aligned}
\dim\left(E_\lambda(A)\right) &= n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \qquad \textit{(théorème du rang)} \\
&= n - \mathrm{rg}(A^\top - \lambda I_n) \\
&= \dim\left(E_\lambda(A^\top)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim\left(E_\lambda(A^\top)\right) = \dim\left(E_\lambda(A)\right)}$$

Partie D : Un modèle de Leslie conservatif à quatre états.

$$X_{n+1} = LX_n, \qquad L = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

18) a) On interprète les coefficients de L entre comme des transferts d'effectifs entre deux générations :

- La première colonne : La moitié des follicules au repos reste au repos et l'autre passe à l'état 2.
- La deuxième colonne : $1/3$ des follicules de l'état 2 revient au repos et $2/3$ passent à l'état 3.
- La troisième colonne : $1/4$ des follicules de l'état 3 revient au repos et $3/4$ passent à l'état 4.
- La quatrième colonne : tous les follicules de l'état 4 reviennent au repos à la génération suivante.

b) On remarque que $T_n = \mathbb{1}_4 X_n$ et on a $\mathbb{1}_4 L = \mathbb{1}_4$ donc $T_{n+1} = \mathbb{1}_4 L X_n = 1_4 X_n = T_n$.

$$\boxed{(T_n) \text{ est constante}}$$

Interprétation : $\boxed{\text{L'effectif total n'évolue pas}}$.

c) (*Non rédigé : récurrence sur n*) $\boxed{\text{si } X_0 \in \mathcal{S}, \text{ alors } X_n \in \mathcal{S} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

d) $L^2 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L^4 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$

$$\boxed{L^4 > 0}$$

19) a) oui et non : oui car L remplie toutes les conditions, et non car il ne permet pas de savoir que $X \in S$.

b) *C'est la résolution d'un système* on trouve $X^* = \begin{pmatrix} \frac{12}{25} \\ \frac{6}{25} \\ \frac{4}{25} \\ \frac{3}{25} \end{pmatrix}$

c) X^* donne l'unique répartition stationnaire de follicules entre les trois états.
Si a une génération donnée la population de follicules est répartie selon ces proportions (48%, 24%, 16%, 12%) alors on obtiendra la même proportion la génération suivante.

20) a) i. *(non rédigé)* La valeur propre est 1

ii. *(non rédigé)* Appliquer à L le lemme de la partie C. La dimension de $E_1(L)$ est 1 et les autres valeurs propres sont de modules < 1

$$\boxed{|\lambda_2| < 1,\ |\lambda_3| < 1 \text{ et } |\lambda_4| < 1}$$

iii. $LU_2 = \lambda_2 U_2$ donc $\mathbb{1}_4^T L U_2 = \lambda_2 \mathbb{1}_4^T U_2$ et comme L est stochastique en colonnes $\mathbb{1}_4^T U_2 = \lambda_2 \mathbb{1}_4^T U_2$

on en déduit que $(1-\lambda_2)\mathbb{1}_4^T U_2 = 0$ et comme $\lambda_2 \neq 1$ il vient $\mathbb{1}_4^T U_2 = 0$ et donc $\boxed{U_2 \in \mathcal{H}}$
On montre de même que $\boxed{U_3 \in \mathcal{H} \text{ et } U_4 \in \mathcal{H}}$

b) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $X_{n+1} = LX_n$, avec $X_0 \neq 0$ et $X_0 \geqslant 0$.

On note $T_0 = x_{0,1} + x_{0,2} + x_{0,3} + x_{0,4}$ et $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de X_0 dans base $\mathscr{B}$.

i. T_0 est la somme de 4 réels $\geqslant 0$ et non tous nuls donc $\boxed{T_0 \neq 0}$
Interprétation T_0 est le nombre total de follicules pileux.

(On a montré qu'il était constant au cours des différentes générations)

ii. *(non rédigé)* Il suffit de multiplier $X_0 = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3 + \alpha_4 U_4$ à gauche par $\mathbb{1}_4$ et d'utiliser le résultat de 20) a) iii. $\boxed{\alpha_1 = T_0}$

iii. Même raisonnement qu'à la question 14) c) :

$$||X_n - \alpha_1 U_1||_1 \leqslant |\alpha_2|\,|\lambda_2|^n\,||U_2||_1 + |\alpha_3|\,|\lambda_3|^n\,||U_3||_1 + |\alpha_4|\,|\lambda_4|^n\,||U_4||_1$$

et comme $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_3| < 1$ et $|\lambda_4| < 1$ il vient :

$$\boxed{(X_n) \text{ converge vers } T_0\,X^*}$$

iv. Interprétation : Quel que soit la répartition initiale, après "plusieurs" générations, la population des follicules se répartit selon les proportions de stables X^*.
Si vous avez des idées, vous pouvez préciser ici les limites de ce modèle.

Partie E : L'informatique de la partie C.

Voir aussi la feuille d'informatique 19

21) *(Beaucoup d'approches possibles)*

```
def stochastique_en_ligne(M):
    for x in M:
        if sum(x) != 1:
            return False
    return True



def stochastique_en_colonne(M):
    n, p =np.shape(M)
    for j in range(p):
        S = sum([M[i,j] for i in range(n)])
        if S != 1:
            return False
    return True
```

22)

```
tol = 1E-9

def stochastique_en_ligne(M):
    for x in M:
        if abs(sum(x) - tol)!= 1:
            return False
    return True



def stochastique_en_colonne(M):
    n, p =np.shape(M)
    for j in range(p):
        S = sum([M[i,j] for i in range(n)])
        if abs(S - tol)!= 1:
            return False
    return True
```

23)

```
def positif_strict(M):
    n, p = np.shape(M)
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            if M[i, j] <= 0:
                return False
    return True

def test(P):
    n, p = np.shape(P)
```

```
    U = np.eye(n)
    for k in range((n-1)**2+2):
        U = np.dot(U, P)
        if positif_strict(U):
            return True
    return False
```

24) a)
```
def indice\_max\_module(valeurs):
    ind = 0
    for i in range(1, len(valeurs)):
        if abs(valeurs[i]) > abs(valeurs[ind]) :
            ind = i
    return ind
```

b)
```
def proportion_stable(L):
    U = elements_dominant(L)[1]
    return U/(np.sum(U))
```