$\boxed{\text{Correction du devoir surveillé de (4 heures) du samedi 10 janvier}}$

Questions préliminaires.

Matrices à coefficients positifs ou strictement positifs.

1) Soir A et B deux matrices carrées telles que $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$,

pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $\quad (AB)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ $\quad$ et comme les a_{ik} et b_{kj} sont positifs, il vient $AB \geqslant 0$

$$\boxed{\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \geqslant 0\ \} \text{ est stable par produit}}$$

2) *Ici on a besoin de $n \geqslant 2$ ou $p \geqslant 2$.*
En prenant la matrice M avec que des zéros sauf $(M)_{0,0} = 1$ on a une matrice qui vérifie $M \geqslant 0$ et $M \neq 0_{n,p}$ mais qui ne vérfie pas : $M > 0$

$$\boxed{\left\{M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mid M > 0\ \right\} \neq \left\{M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mid M \geqslant 0 \text{ et } M \neq 0_{n,p}\ \right\}}$$

Norme 1 d'un vecteur.

1) a) Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $|u_i| \in \mathbb{R}_+$ $\quad$ donc $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{p} |u_i| \in \mathbb{R}_+$ et ainsi $\boxed{\forall u \in \mathbb{C}^p,\ ||u||_1 \geqslant 0}$

b) La somme de réels positifs est nul si, et seulement si, tous les réels sont positifs.

or pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $|u_i| \geqslant 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} |u_i| = 0 \iff \forall i \in [\![1,p]\!],\ |u_i| = 0$ $\quad$ donc

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{C}^p,\ ||u||_1 = 0 \iff u = 0_{\mathbb{C}^p}}$$

c) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{C}^p$,

$$||\lambda u||_1 = \sum_{i=1}^{p} |\lambda u_i| = \sum_{i=1}^{p} |\lambda|.|u_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{p} |u_i|$$

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall u \in \mathbb{C}^p, \quad ||\lambda u||_1 = |\lambda|\, ||u||_1}$$

d) Soient $u \in \mathbb{C}^p$ et $v \in \mathbb{C}^p$,
on sait que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $|u_i + v_i| \leqslant |u_i| + |v_i|$ $\qquad$ *(inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$)*
on sommant membre pour i allant de 1 à p, il vient :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{C}^p, \forall v \in \mathbb{C}^p,\ \ ||u+v||_1 \leqslant ||u||_1 + ||v||_1}$$

2) a) *Raisonnons par double-implication :*

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $\left(||X_n||_1\right)$ tend vers 0,

Comme les modules sont positifs, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\ |x_{n,i}| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{p} |x_{n,j}|$ ce qui donne

$$0 \leqslant |x_{n,i}| \leqslant ||X_n||_1$$

or $\left(||X_n||_1\right)$ tend vers 0 donc *(th. des gendarmes)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |x_{n,i}| = 0$

$$\text{donc pour tout } i \in [\![1,p]\!],\ \lim_{n\to+\infty} x_{n,i} = 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_{n,i} = 0$,

on a alors pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |x_{n,i}| = 0$ et par limite d'une somme on en déduit $\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{p} |x_{n,j}|\right)$ converge vers 0 ou encore $\left(||X_n||_1\right)$ tend vers 0.

En conclusion :

$$\boxed{\left(||X_n||_1\right) \text{ tend vers 0 si, et seulement si, pour tout } i \in [\![1,p]\!],\ \lim_{n\to+\infty} x_{n,i} = 0}$$

b) On suppose que pour un $\alpha \in [0,1[$ on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||X_{n+1}||_1 \leqslant \alpha||X_n||_1$ $(*)$
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||X_n||_1 \leqslant \alpha^n||X_0||_1$
Pour $n = 0$ on a clairement $||X_0||_1 \leqslant \alpha^0||X_0||_1$ et si pour un entier n $||X_n||_1 \leqslant \alpha^n||X_0||_1$ alors avec $(*)$ on en déduit que $||X_{n+1}||_1 \leqslant \alpha^{n+1}||X_0||_1$ On a établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant ||X_n||_1 \leqslant \alpha^n||X_0||_1$$

Sachant que $\alpha \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$ et ainsi *(par encadrement)* $\left(||X_n||_1\right)$ tend vers 0

$$\boxed{\text{S'il existe } \alpha \in [0,1[\text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N},\ ||X_{n+1}||_1 \leqslant \alpha||X_n||_1 \text{ alors } (X_n) \text{ converge vers } 0_{\mathbb{R}^p}}$$

3) C'est juste un calcul de somme :

```
def norme_1(u):
    S = 0
    for x in u:
        S += abs(x)
    return S
```

Matrice à diagonale strictement dominante.

4)

```
def diago_dominante(A):
    n, p = np.shape(A)                        # on ne vérifie pas que n = p
    for i in range(n):
        S = 0
        for j in range(n):
            S += abs(A[i, j])
        if abs(M[i, i]) <= S - abs(M[i, i]):   # Cette condition est équivalente à $(*)$
            return False
    return True
```

$$(*) \text{ est } |a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{p} |a_{ij}|$$

5) a) $AX = 0$ donc en particulier $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{kj}x_j = 0$, donc $a_{kk}x_k = -\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{p} a_{kj}x_j$

En passant au module et en utilisant l'inégalité triangulaire il vient : $\boxed{|a_{kk}|\,|x_k| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{p} |a_{kj}|\,|x_j|}$

et comme $|x_j| \leqslant |x_k|$ et que $|a_{kj}| \geqslant 0$ on en déduit : $\boxed{|a_{kk}|\,|x_k| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{p} |a_{kj}|\,|x_k|}$

b) $|a_{kk}|\,|x_k| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{p} |a_{kj}|\,|x_k|$ donc si $|x_k| \neq 0$ alors $|a_{kk}| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{p} |a_{kj}|$ ce qui est impossible car A est à diagonale strictement dominante, donc on peut affirmer que $x_k = 0$ ce qui entraîne que $X = 0$.

On a montré que $AX = 0 \Longrightarrow X = 0$ donc

$$\boxed{A \text{ est inversible}}$$

6) a) Non, car on vient de démontrer que toute matrice à diagonale dominante sont inversibles.

b) Oui, par exemple $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et pas à diagonale strictement dominante.

Partie A : Etude des valeurs propres d'une matrice.

7)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rg}(L-\lambda I_3) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ \dfrac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & \dfrac{3}{5} & \dfrac{2}{5}-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2-5\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 2L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow 5L_3 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 2-2\lambda^2 & 1 \\ 0 & 3 & 2-5\lambda \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 2-2\lambda^2 & 1 \\ 0 & F(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - (2-5\lambda)L_2 \\
& \qquad (\textit{où } \; F(\lambda) = 3-(2-5\lambda)(2-2\lambda^2) = -10\lambda^3+4\lambda^2+10\lambda-1 \\
&= \operatorname{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 1 & 2-2\lambda^2 \\ 0 & 0 & F(\lambda) \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire}} \qquad C_3 \leftrightarrow C_2
\end{aligned}
$$

donc $\quad \operatorname{rg}(M_5-\lambda I_3) < 3$ si, et seulement si, $F(\lambda) = 0$

$$\boxed{\operatorname{rg}(L-\lambda I_3) \neq 3 \text{ si, et seulement si, } 10\lambda^3 - 4\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0}$$

8) Le polynôme P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 30x^2 - 8x - 10$

- $P'(-1) = 16 > 0$, $P'(0) = -10 < 0$ et P' est continue sur l'intervalle donc $\exists a \in]-1, 0[$: $P'(a) = 0$.
- $P'(0) = -10 < 0$, $P'(1) = 16 > 0$ et P' est continue sur l'intervalle donc $\exists b \in]0, 1[$: $P'(b) = 0$.

$$\boxed{P' \text{ admet deux racines réelles } a \text{ et } b \text{ vérifiant } -1 < a < 0 < b < 1}$$

9) P' est un trinôme de coefficient dominant positif donc on connait son signe et ainsi les variations de P.
De plus $P(x) \underset{-\infty}{\sim} 30x^2 = -\infty$ et $P(x) \underset{+\infty}{\sim} 30x^2 = +\infty$
On a ainsi le tableau de variations de P :

x	$-\infty$	-1	a	0	$\frac{2}{5}$	b	1	2	$+\infty$
$P'x)$		$+$	0		-	0	$+$		
P	$-\infty$	-3	$P(a) > 0$	1	-3	$P(b) < 0$	-3	45	$+\infty$

10) On remarque que $P(0) = 1 > 0$ donc les variations de P permettent d'affirmer que $P(a) > 0$.
De plus $P\left(\dfrac{2}{5}\right) = -3$, $P(1) = -3$ et $P(2) = 45$
(On applique à P le théorème des valeurs intermédiaires)

- P est continue et change de signe entre -1 et a donc il existe une racine de P dans $]-1; a[$
- P est continue et change de signe entre 0 et $\dfrac{2}{5}$ donc il existe une racine de P dans $\left]a; \dfrac{2}{5}\right[$
- P est continue et change de signe entre 1 et 2 donc il existe une racine de P dans $]1; 2[$

$$\boxed{P \text{ admet trois racines réelles } \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ et } \lambda_3 \text{ vérifiant : } -1 < \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \dfrac{2}{5} < 1 < \lambda_3 < 2}$$

11)

```
def f(x):
    return 10*x**3 - 4*x**2 - 10*x + 1

a, b, eps = 1, 2, 10**-4
while b-a > eps:
    c =(a+b)/2
    if f(c) < 0:         # ici f est croissante, f(a) < 0
        a = c
    else:
        b = c
print(c)
```

12) Je trace la courbe et je localise la racine puis je calcule $P(1{,}17) < 0$ et $P(1{,}18) > 0$

$$\boxed{\lambda_3 \approx 1{,}17}$$

Partie B : Un premier modèle de Leslie.

$$\begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

13) On interprète les coefficients de la matrice L comme des taux de transition et de fécondité entre deux générations.

• A la première ligne : le jeunes adultes donnent en moyenne naissances à deux jeunes et les adultes agés à un jeune.

• A la deuxième ligne : La moitié des jeunes deviennent jeunes adultes (La moitié des jeunes sortent du modèle) aucun jeune adulte ne reste dans cette classe.

• A la troisième ligne : 60% des jeunes adultes survivent et deviennent âgés, 40% des adultes âgés survivent.

14) On pose dans cette question $X_0 = (100, 60, 40)$ et on note pour chaque n dans $\mathbb{N}$, $t_n = j_n + a_n + v_n$.

a) $t_0 = j_0 + a_0 + v_0 = 100 + 60 + 40 = 200$ et $t_1 = j_1 + a_i + v_i = 160 + 50 + 52 = 262 \ > 200$

donc $\boxed{(t_n) \text{ n'est pas constante}}$

b) t_n représente l'effectif total de la population à la génaration n.
(t_n) n'est pas constante signifie que cet effectif varie entre les générations.

15) a) Soit $U = (u_1, u_2, u_3)$ un vecteur non nul et λ un réel tel que $LU = \lambda U$

Nécessairement λ est une valeur propre de L et U vérifie le système : $\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 2-2\lambda^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(Grâce au calcul sur le rang de la question 5))

Si on impose $u_2 = 1$, il vient : $\boxed{U = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 1 \\ 2(\lambda^2 - 1)) \end{pmatrix}}$

Remarque : d'autres expression sont possibles en particulier pour u_3.

b) Pour avoir un vecteur propre U avec $u_2 = 1$ et $u_1 > 0$ et $u_3 > 0$ on a nécessairement $\boxed{\hat{\lambda} = \lambda_3}$
et alors la question précédente montre qu'il y a un unique vecteur propre associé vérifiant $u_2 = 1$.

$$\boxed{\text{il existe un unique } V \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ et un unique réel } \hat{\lambda} \text{ tels que : } v_1 > 0,\ v_2 = 1 \text{ et } v_3 > 0 \text{ et } LV = \hat{\lambda} V}$$

c)

$$\begin{aligned} (LV)^* &= (\hat{\lambda} V)^* \\ &= \frac{1}{\hat{\lambda} v_1 + \hat{\lambda} v_2 + \hat{\lambda} v_3} \begin{pmatrix} \hat{\lambda} v_1 \\ \hat{\lambda} v_2 \\ \hat{\lambda} v_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} v_1 + \hat{\lambda} v_2 + \hat{\lambda} v_3} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{v_1 + v_2 + v_3} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{(LV)^* = V^*}$$

Interprétation : Les composantes de V^* représentent les proportions des différentes classes.
$(LV)^* = V^*$ signifie que si la population initiale est V alors à chaque génération l'effectif de chaque classe est multiplié par λ_3 et mais les proportions entre classes restent inchangées.

$$\boxed{V^* \text{ est une répartition stable du modèle}}$$

16) a) Montrons, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = L^n X_0$.

• Pour $n = 0$,

$L^0 = I_3$ donc on a bien $X_0 = L^0 X_0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = L^n X_0$,

on a $X_n = L^n X_0$ et $X_{n+1} = LX_n$ donc $X_{n+1} = L^{n+1} X_0$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \ X_n = L^n X_0}$$

b)

$$\begin{aligned} X_n &= L^n X_0 \\ &= L^n \left(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3\right) \\ &= \alpha_1 L^n U_1 + \alpha_2 L^n U_2 + \alpha_3 L^n U_3 \end{aligned}$$

et comme ce sont des vecteurs propre de L il vient :

$$\boxed{X_n = \alpha_1 \lambda_1^n U_1 + \alpha_2 \lambda_2^n U_2 + \alpha_3 \lambda_3^n U_3}$$

c) $\alpha_3 \neq 0$ donc l'égalité précédente donne :

$$\begin{aligned} \left|\left|\frac{1}{\alpha_3 \lambda_3^n} X_n - U_3\right|\right|_1 &= \left|\left|\alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^n U_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^n U_2\right|\right|_1 \\ &\leqslant |\alpha_1| \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right|^n ||U_1||_1 + |\alpha_2| \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right|^n ||U_2||_1 \end{aligned}$$

or $\left|\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\right| < 1$ donc

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{1}{\alpha_3 \lambda_3^n} X_n\right) \text{ converge vers } U_3}$$

d) A long terme on a la répartition $U_3^* = V^* = \dfrac{1}{2\lambda_3 + 1 + 2(\lambda_3^2 - 1)} \begin{pmatrix} 2\lambda_3 \\ 1 \\ 2(\lambda_3^2 - 1) \end{pmatrix}$

En prenant la valeur approchée de λ_3, on obtient à long terme la répartition :

$$\boxed{57\% \text{ de jeunes, } 24\% \text{ d'adultes jeunes et } 19\% \text{ d'adultes agés}}$$

Partie C : Autour des matrices stochastiques.

17) a) A est stochastique par lignes si, et seulement si, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 &\iff \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (\mathbb{1}_n)_j = 1 \\ &\iff (A\mathbb{1}_n)_i = (\mathbb{1}_n)_i \end{aligned}$$

$$\boxed{A \text{ est stochastique par lignes si, et seulement si, } A \geqslant 0 \text{ et } A\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n}$$

b) Soient A et B deux matrices stochastiques par lignes,

- D'une part sachant que $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$ on a bien $AB \geqslant 0$ *(montré la question 1)*,
- d'autre part : $AB\mathbb{1}_n = A\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n$

donc AB est stochastique.

$$\boxed{\text{le produit de deux matrices stochastiques par lignes de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ l'est, elle aussi}}$$

c) Soient A une matrice stochastique par lignes,
$A^0 = I_n$ qui est stochastique et si pour un entier k, A^k l'est alors d'après 15)a) A^{k+1} l'est aussi,

on a bien *(Récurrence)* :

$$\boxed{\text{Les puissances d'une matrice stochastique par lignes de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ le sont, elles aussi}}$$

d) si A est stochastique par lignes alors $A\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n$
donc comme $\mathbb{1}_n \neq 0_n$ on a bien $1 \in Sp(A)$.

$$\boxed{\text{si } A \text{ est stochastique par lignes alors 1 est une valeur propre de } A}$$

18) a) i. $AX = \lambda X$ donc $(AX)_k = \lambda X_k$ donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j = \lambda x_k$

En passant au module on a :

$$\begin{aligned}
|\lambda|.|x_k| &= \left|\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j\right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}x_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\,|x_j| && \textit{car les } a_k \textit{ sont des réels positifs} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\,|x_k| && \textit{car en plus } |x_k| \textit{ est le plus grand des } |x_j|
\end{aligned}$$

$$\boxed{|\lambda|.|x_k| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\,.\,|x_k|}$$

ii. On a $X \neq 0_{n\times 1}$ donc $|x_k| > 0$ et ainsi l'inégalité précédente donne $|\lambda| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}$

or A est stochastique par lignes donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 1$

ce qui donne :

$$\boxed{|\lambda| \leqslant 1}$$

b) i.

$$\begin{aligned}
(B-I_{n-1})_{ii} &= |b_{ii}-1| \\
&= |a_{i,i}-1| \\
&= 1-a_{i,i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - a_{i,i} \\
&= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \\
&> \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} a_{ij} \qquad \textit{(car } A>0\textit{)} \\
&> \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} b_{ij} \\
&> \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} |(B-I_{n-1})_{ij}|
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{B-I_{n-1} \text{ est à diagonale strictement dominante}}$$

on peut en déduire *(question 5))* que $B-I_{n-1}$ est inversible et ainsi que son rang vaut $n-1$.
or sachant que le rang d'une matrice est la dimension de l'espace engendré par les lignes ou par les colonnes on en déduit que :

$$\operatorname{rg}(A-I_n) \in \{n-1, n\}$$

et comme 1 est une valeur propre de A il vient :

$$\boxed{\operatorname{rg}(A-I_n) = n-1}$$

ii. Le théorème du rang appliqué directement à $A-I_n$ donne directement :

$$\boxed{\text{le sous-espace propre de } A \text{ associé à 1 est de dimension 1}}$$

iii. $AX=\lambda X$ donc $(AX)_k = \lambda X_k$ donc $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j = \lambda x_k$ puis $\lambda x_k - a_{kk}x_k = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j$

en passant au module il vient : $|\lambda - a_{kk}|\,|x_k| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\,|x_j|$ puis $|\lambda - a_{kk}|\,|x_k| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\,|x_k|$

or $X\neq 0$ donc $x_k \neq 0$ et alors :

$$\boxed{|\lambda - a_{kk}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|}$$

iv. On suppose que $|\lambda| = 1$
L'inégalité précédente donne : $|\lambda - a_{kk}| \leqslant 1 - a_{kk}$ donc $|\lambda - a_{kk}| \leqslant |\lambda| - |a_{kk}|$
or l'inégalité triangulaire donne $|\lambda - a_{kk}| \leqslant |\lambda| - |a_{kk}|$.
On a donc $|\lambda - a_{kk}| = |\lambda| - |a_{kk}|$ qui entraine *(cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire)* qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\lambda = \alpha a_{kk}$, et comme $a_{kk} \in \mathbb{R}^+$ on a $\lambda = 1$

On a montré que : $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$, or on sait de $|\lambda| \leqslant 1$ donc

$$\boxed{\text{si } \lambda \neq 1 \text{ alors } |\lambda| < 1}$$

19) a) On remarque A est stochastique par colonnes si, et seulement si, A^T est stochastique par lignes
or $\quad \mathbb{1}_n^T A = \mathbb{1}_n^T$ équivaut à $A^T \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n$

$$\boxed{A \text{ est stochastique par colonnes si, et seulement si, } A \geqslant 0 \text{ et } \mathbb{1}_n^T A = \mathbb{1}_n^T}$$

b) • Soit $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) &= \mathrm{rg}\Big((A-\lambda I_n)^\top\Big) \\ &= \mathrm{rg}(A^T - \lambda I_n^T) \\ &= \mathrm{rg}(A^T - \lambda I_n) \end{aligned}$$

ainsi : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n \iff \mathrm{rg}(A^T - \lambda I_n) < n \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(A^T)$

donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)}$

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \big(= \mathrm{Sp}(A^\top)\big)$,

$$\begin{aligned} \dim\left(E_\lambda(A)\right) &= n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) & \textit{(théorème du rang)} \\ &= n - \mathrm{rg}(A^\top - \lambda I_n) \\ &= \dim\big(E_\lambda(A^\top)\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim\big(E_\lambda(A^\top)\big) = \dim\left(E_\lambda(A)\right)}$$

c) *(non corrigé)*

20) *(rapidement)*

Soit A une matrice stochastique et vérifiant $\exists m \in \mathbb{N},\ A^m > 0$,

• d'après 17) d) on a $\boxed{1 \in Sp(A)}$

• d'après 18)b)ii. on a : $\dim(E_1(A^m)) = 1$ ce qui entraine *($E_1(A)) \subset E_1(A^m))$* que $\boxed{\dim(E_1(A)) = 1}$

• d'après 18)b)iv. on a : $\forall \lambda \in Sp(A^m) \setminus \{1\},\ |\lambda| < 1$

ce qui entraine *($\lambda \in Sp(A) \Rightarrow \lambda^m \in Sp(A^m)$)* que $\boxed{\forall \lambda \in Sp(A) \setminus \{1\},\ |\lambda| < 1}$

Partie D : Un modèle de Leslie conservatif à quatre états.

$$X_{n+1} = LX_n, \qquad L = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

21) a) On interprète les coefficients de L entre comme des transferts d'effectifs entre deux générations :

- La première colonne : La moitié des follicules au repos reste au repos et l'autre passe à l'état 2.
- La deuxième colonne : 1/3 des follicules de l'état 2 revient au repos et 2/3 passent à l'état 3.
- La troisième colonne : 1/4 des follicules de l'état 3 revient au repos et 3/4 passent à l'état 4.
- La quatrième colonne : tous les follicules de l'état 4 reviennent au repos à la génération suivante.

b) On remarque que $T_n = \mathbb{1}_4 X_n$ et on a $\mathbb{1}_4 L = \mathbb{1}_4$ donc $T_{n+1} = \mathbb{1}_4 L X_n = 1_4 X_n = T_n$.

$$\boxed{(T_n) \text{ est constante}}$$

Interprétation : $\boxed{\text{L'effectif total n'évolue pas}}$.

c) (*Non rédigé : récurrence sur* n) $\boxed{\text{si } X_0 \in \mathcal{S}, \text{ alors } X_n \in \mathcal{S} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

d) $L^2 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L^4 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$

$$\boxed{L^4 > 0}$$

22) a) oui et non : oui car L remplie toutes les conditions, et non car il ne permet pas de savoir que $X \in S$.

b) *C'est la résolution d'un système* on trouve $X^* = \begin{pmatrix} \frac{12}{25} \\ \frac{6}{25} \\ \frac{4}{25} \\ \frac{3}{25} \end{pmatrix}$

c) X^* donne l'unique répartition stationnaire de follicules entre les trois états.
Si a une génération donnée la population de follicules est répartie selon ces proportions (48%, 24%, 16%, 12%) alors on obtiendra la même proportion la génération suivante.

23) a) i. *(non rédigé)* La valeur propre est 1

ii. *(non rédigé)* Appliquer à L le lemme de la partie C. La dimension de $E_1(L)$ est 1 et les autres valeurs propres sont de modules < 1

$$\boxed{|\lambda_2| < 1,\ |\lambda_3| < 1 \text{ et } |\lambda_4| < 1}$$

iii. $LU_2 = \lambda_2 U_2$ donc $\mathbb{1}_4^T LU_2 = \lambda_2 \mathbb{1}_4^T U_2$ et comme L est stochastique en colonnes $\mathbb{1}_4^T U_2 = \lambda_2 \mathbb{1}_4^T U_2$

on en déduit que $(1 - \lambda_2)\mathbb{1}_4^T U_2 = 0$ et comme $\lambda_2 \neq 1$ il vient $\mathbb{1}_4^T U_2 = 0$ et donc $\boxed{U_2 \in \mathcal{H}}$
On montre de même que $\boxed{U_3 \in \mathcal{H} \text{ et } U_4 \in \mathcal{H}}$

b) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $X_{n+1} = LX_n$, avec $X_0 \neq 0$ et $X_0 \geqslant 0$.

On note $T_0 = x_{0,1} + x_{0,2} + x_{0,3} + x_{0,4}$ et $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de X_0 dans base $\mathscr{B}$.

i. T_0 est la somme de 4 réels $\geqslant 0$ et non tous nuls donc $\boxed{T_0 \neq 0}$
Interprétation T_0 est le nombre total de follicules pileux.

(On a montré qu'il était constant au cours des différentes générations)

ii. *(non rédigé)* Il suffit de multiplier $X_0 = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3 + \alpha_4 U_4$ à gauche par $\mathbb{1}_4$ et d'utiliser le résultat de 20) a) iii. $\boxed{\alpha_1 = T_0}$

iii. Même raisonnement qu'à la question 14) c) :

$$||X_n - \alpha_1 U_1||_1 \leqslant |\alpha_2|\,|\lambda_2|^n\,||U_2||_1 + |\alpha_3|\,|\lambda_3|^n\,||U_3||_1 + |\alpha_4|\,|\lambda_4|^n\,||U_4||_1$$

et comme $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_3| < 1$ et $|\lambda_4| < 1$ il vient :

$$\boxed{(X_n) \text{ converge vers } T_0\, X^*}$$

iv. Interprétation : Quel que soit la répartition initiale, après "plusieurs" générations, la population des follicules se répartit selon les proportions de stables X^*.
Si vous avez des idées, vous pouvez préciser ici les limites de ce modèle.