Feuille_Cours_7_3 : Diagonalisation.

Ex 1 : *(Démonstration de cours)*

1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
   on suppose connaître deux scalaires λ_1 et λ_2 distincts et deux vecteurs u_1 et u_2 non nuls de E vérifiant :

$$f(u_1) = \lambda_1 u_1 \qquad \text{et} \qquad f(u_2) = \lambda_2 u_2$$

   Montrer que (u_1, u_2) est une famille libre de E.

2) Généraliser

Ex 2 :

1) Vérifier que 1 et -1 sont des valeurs propres de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$ et en déduire le spectre de f.

2) Déterminer les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(en réfléchissant avant de partir dans de longs calculs).

Ex 3 : *(Démonstration de cours)*

Soit f un endomorphisme de E.

1) Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ m valeurs propres distinctes de f et $u_1, ..., u_m$ des vecteurs vérifiant :

$$\forall i \in [\![1;m]\!], \quad u_i \in E_{\lambda_i}(f) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m} u_i = 0_E$$

   Montrer que : $\forall i \in [\![1;m]\!], \quad u_i = 0_E$

2) Enoncer et démontrer le théorème sur la juxtaposition des bases des sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
   On pourra raisonner avec les notations suivantes :
   Pour $i \in [\![1,m]\!]$, $\mathscr{B}_i = (u_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n_i}$ une base de $E_{\lambda_i}(f)$
   et $I = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leqslant i \leqslant m \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n_i \}$,

Ex 4 : Déterminer sans calcul le spectre des matrices suivantes puis déterminer si elle sont diagonalisables.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *(ici il faut un petit calcul)*

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ex 5 : Dans les différents cas suivants, diagonaliser (si possible) l'endomorphisme f.

1) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$.
   on note f l'endomorphisme de E définie par $f(e_1) = 4e_1 - 2e_2$ et $f(e_2) = e_1 + e_2$.

2) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
   on note f l'endomorphisme de E définie par $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = -e_1$ et $f(e_3) = e_3$.

3) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ex 6 : Diagonaliser (si possible) les matrices suivantes. *On répondra séparément suivant que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$*

$$M_1=\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}\qquad M_2=\begin{pmatrix}0&1\\-6&5\end{pmatrix}\qquad M_3=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}\qquad M_4=\begin{pmatrix}2&0\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$M_5=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad M_6=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\qquad M_7=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-5&0\\1&8&1\end{pmatrix}\qquad M_8=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Indication : on a déjà vu ces matrices et les résultats vus dans la feuille_cours_7 sont rappelés ci-dessous •

$\boxed{\text{si } \mathbb{K}=\mathbb{R},\ \mathrm{Sp}(M_5)=\{1\} \qquad \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{C},\ \mathrm{Sp}(M_5)=\left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}}$

$\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1(M_5)}$ $\boxed{\left(\begin{pmatrix}e^{i\frac{2\pi}{3}}\\e^{i\frac{4\pi}{3}}\\1\end{pmatrix}\right) \text{ une base de } E_{e^{i\frac{2\pi}{3}}}(M_5)}$ $\boxed{\left(\begin{pmatrix}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\\e^{-i\frac{4\pi}{3}}\\1\end{pmatrix}\right) \text{ une base de } E_{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}(M_5)}$.

• $\boxed{\text{Le spectre de } M_6 \text{ est } \{1,2\}}$

$\boxed{\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_2(M_6)}$ $\boxed{\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1(M_6)}$.

• $\boxed{\mathrm{Sp}(M_7)=\{-5\,,\,0\,,\,2\}}$

$\boxed{\left(\begin{pmatrix}4\\-35\\46\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{-5}(M_7))}$ $\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_0(M_7))}$ $\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_2(M_7))}$

• $\boxed{\mathrm{Sp}(M_8)=\{0\,,\,3\}}$

$\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_0(M_8))}$ $\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_3(M_8))}$

Ex 7 : *(Matrice transposée)* Soit M une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que : $\mathrm{Sp}(M)=\mathrm{Sp}(M^\top)$.
2) Montrer que : M est diagonalisable si, et seulement si, $M^\top$ est diagonalisable.

Ex 8 : *(Matrice d'homothétie)*

1) Soient $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un scalaire.
   Montrer que : si $sp(M)=\{\lambda\}$ et M est diagonalisable alors $M=\lambda I_n$.
2) En déduire une proposition permettant de montrer qu'une matrice carrée n'est pas diagonalisable.
3) Que peut-on en déduire sur les matrices suivantes :

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad A_3=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&2&0\\3&1&1\end{pmatrix}$$

Ex 9 : *(Trace d'une matrice carrée)* On appelle trace l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\mathrm{tr}(M)=\sum_{i=1}^n m_{i,i}$

1) a. Montrer que l'application trace est linéaire. *(C'est une forme linéaire).*
   b. Montrer que pour toutes matrices A et B respectivement dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{C})$, $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$
   c. En déduire que pour toutes matrices carrées A et B, si A et B sont semblables alors $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$.
2) Montrer que si A est une matrice carrée diagonalisable alors : $\mathrm{tr}(A)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}\lambda\dim(E_\lambda(A))$.
3) **Applications**.
   a. Soit P une matrice carrée vérifiant $P^2=P$, on admet *(pour l'instant)* que P est diagonalisable.

      Montrer que : $\mathrm{rg}(P)=\mathrm{tr}(P)$

   b. Soit A une matrice carrée vérifiant $A^2=I_n$, on admet que A est diagonalisable.

      Montrer que : $\dim(E_1(A))=\dfrac{n+\mathrm{tr}(A)}{2}$ et $\dim(E_{-1}(A))=\dfrac{n-\mathrm{tr}(A)}{2}$