Correction de la feuille_Cours_7_3 : Diagonalisation.

Ex 1 : *(Démonstration de cours)*

1) Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0_E$, **(1)**

comme f est linéaire on en déduit $\alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) = 0_E$, puis $\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 = 0_E$ **(2)**

En faisant $(2) - \lambda_2(1)$ on obtient : $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2) u_1 = 0_E$,

et comme $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ et $u_1 \neq 0_E$ on en déduit $\alpha_1 = 0$

en reprenant **(1)** on en déduit $\alpha_2 u_2 = 0_E$ qui entraîne $\alpha_2 = 0$ car $u_2 \neq 0_E$.

on a bien montré que : $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0_E \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une famille libre}}$$

2) On fixe m dans $\mathbb{N}^*$.

Soient u_1, ... , u_m des vecteurs propres associés à m valeurs propres distinctes λ_1, ... , λ_m.

Montrons par une récurrence finie que $(u_1, ..., u_m)$ est une famille libre.

- Pour $k = 1$,

  comme u_1 est un vecteur propre $u_1 \neq 0_E$ donc (u_1) est une famille libre.

- Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$ tel que $(u_1, ..., u_k)$ est une famille libre,

  (Montrons que $(u_1, ..., u_{k+1})$ est une famille libre)

  Soient $(\alpha_1, ..., \alpha_{k+1}) \in \mathbb{K}^{k+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j u_j = 0_E$, **(1)**

  comme f est linéaire on en déduit $\displaystyle\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j f(u_j) = 0_E$, puis $\displaystyle\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \lambda_j u_j = 0_E$ **(2)**

  en faisant $(2) - \lambda_{\lambda_{k+1}}(1)$ on obtient : $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1})\, u_j = 0_E$,

  et comme on a supposé que $(u_1, ..., u_k)$ est libre on en déduit $\forall j \in [\![1, k]\!],\ \alpha_j(\lambda_j - \lambda_{k+1}) = 0$

  sachant de plus que $\forall j \in [\![1, k]\!],\ \lambda_j - \lambda_{k+1} \neq 0$ on a $\forall j \in [\![1, k]\!],\ \alpha_j = 0$.

  en reprenant **(1)** on en déduit $\alpha_{k+1} u_{k+1} = 0_E$ qui entraîne $\alpha_{k+1} = 0$ car $u_{k+1} \neq 0_E$.

  on a bien montré que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j u_j = 0_E \Longrightarrow \forall j \in [\![1, k]\!],\ \alpha_j = 0$

  (La famille $(u_1, ..., u_{k+1})$ est libre)

- En conclusion *(de ce raisonnement par récurrence)* :

$$\boxed{(u_1, ..., u_m) \text{ est une famille libre}}$$

Remarque sur le raisonnement par récurrence finie utilisée ci-dessus.

On a montré :

$$\mathcal{P}(1) \text{ (Vraie)}$$
$$\mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2)$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{P}(m-1) \Rightarrow \mathcal{P}(m)$$

ce qui permet d'affirmer que :

$$\mathcal{P}(m) \text{ est vraie.}$$

Ex 2 : 1) On remarque que $(1,1) \neq (0,0)$ et $f((1,1)) = 1\,(1,1)$ donc 1 est une valeur propre de f,
de même $(1,-1) \neq (0,0)$ et $f((1,-1)) = -1\,(1,-1)$ donc -1 est une valeur propre de f.
or $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ a au plus 2 valeurs propres distinctes donc

$$\boxed{\text{Le spectre de } f \text{ est } \{-1;1\}}$$

Remarque : f est diagonalisable car il a deux valeurs propres distinctes et c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 2.

2) On remarque que : $\mathrm{rg}(M - 3I_3) \neq 2$ donc $3 \in Sp(M)$,
de même $\mathrm{rg}(M + 2I_3) \neq 2$ donc $-2 \in Sp(M)$ et $\mathrm{rg}(M - 2I_3) \neq 2$ donc $2 \in Sp(M)$
or $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ a au plus 3 valeurs propres distinctes donc

$$\boxed{\text{Le spectre de } M \text{ est } \{-2;2;3\}}$$

Remarque : M est diagonalisable car il a trois valeurs propres distinctes et c'est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Ex 3 : *(Démonstration de cours)*
Soit f un endomorphisme de E.
1) Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ m valeurs propres distinctes de f et $u_1, ..., u_m$ des vecteurs vérifiant :

$$\forall i \in [\![1;m]\!], \quad u_i \in E_{\lambda_i}(f) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m} u_i = 0_E$$

Montrons par l'absurde que : $\forall i \in [\![1;m]\!], \quad u_i = 0_E$,

On suppose qu'il existe au moins un i pour lequel $u_i \neq 0_E$,
on note alors $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ les vecteurs non nuls de la famille $(u_1, ..., u_m)$
on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} u_{i_k} = 0_E$ et $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ sont des vecteurs propres associés à r valeurs propres distinctes.
ce qui est impossible car le théorème démontré à l'exercice Ex 1 montre que la famille $(u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_r})$ est une famille libre.
En conclusion :

$$\boxed{\text{Si } \forall i \in [\![1;m]\!],\ u_i \in E_{\lambda_i}(f) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} u_i = 0_E \quad \text{alors} \quad \forall i \in [\![1;m]\!],\ u_i = 0_E}$$

Remarque : On dit que les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en *somme directe*.

Mais cette notion est n'est pas au programme de BCPST.

2) *Montrons le théorème suivant* :
Soient $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m$ des familles de vecteurs de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires.
Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont m valeurs propres distinctes de f et
si $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m$ sont respectivement des bases des sous espaces propres $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_m}(f)$,
alors $(\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m)$ est une famille libre.

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

On suppose que : $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont m valeurs propres distinctes de f
et que $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m$ sont respectivement des bases des sous espaces propres $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_m}(f)$.

On utilise les notations suivantes.
Pour $i \in [\![1,m]\!]$, $\mathscr{B}_i = (u_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n_i}$ une base de $E_{\lambda_i}(f)$
et $I = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leqslant i \leqslant m \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n_i\}$,

Montrons que $\mathscr{B} = (u_{i,j})_{(i,j) \in I}$ est une famille libre.

Soit $(\alpha_{i,j}) \in \mathbb{K}^I$ tel $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I} \alpha_{i,j} u_{i,j} = 0_E$,

on a alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j} u_{i,j}\right)}_{\in E_{\lambda_i}(f)} = 0_E$ ce qui entraine avec le lemme de la question 1) que :

$$\forall i \in [\![1;m]\!],\ \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j} u_{i,j} = 0_E$$

mais on sait que pour chaque i, la famille $(u_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant n_i}$ est libre donc on peut en déduire que :

$$\forall i \in [\![1;m]\!], \forall j \in [\![1;n_i]\!],\ \alpha_{i,j} = 0$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{La juxtaposition } (\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m) \text{ est libre.}}$$

Ex 4 : *Remarque : on essaye de "trouver" le spectre par un raisonnement avant d'étudier* $\mathrm{rg}(M - \lambda I_n)$*, mais la méthode consiste à chercher les* λ *tels que* $\mathrm{rg}(M - \lambda I_n) < n$*.*

1) On note : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

D'une part $\mathrm{rg}(M) = 1$ donc $0 \in Sp(M)$, d'autre part $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $3 \in Sp(M)$,

or $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ possède au plus deux valeurs propres distinctes donc $\boxed{Sp(M) = \{0;3\}}$

La matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ a 2 valeurs propres distinctes donc *(Condition suffisante)*

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}}$$

2) On note : $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

On remarque que M est triangulaire donc $\boxed{Sp(M) = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}}$

de plus : $\mathrm{rg}\left(M - \dfrac{2}{3} I_2\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5/3 & 0 \end{pmatrix} = 1$ donc $\dim(E_{\frac{2}{3}}(M)) = 2 - 1 = 1$

M appartient à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(M)} \dim(E_\lambda(M)) = 1 \neq 2$ donc *(Condition nécessaire et suffisante)*

$$\boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

3) On note : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• $\mathrm{rg}(M) = 2$ donc $0 \in Sp(M)$, • $\mathrm{rg}(M - I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ donc $1 \in Sp(M)$.

• $\mathrm{rg}(M - 2I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$ donc $2 \in Sp(M)$.

or $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ possède au plus deux valeurs propres distinctes donc $\boxed{Sp(M) = \{0;1;2\}}$

La matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ a 3 valeurs propres distinctes donc *(Condition suffisante)*

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}}$$

4) On note : $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{rg}(M - \lambda I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & (2-\lambda)^2 & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}}_{triangulaire}$$

donc $\mathrm{rg}(M - \lambda I_3) < 3 \iff \lambda = 2$ ce qui donne $\boxed{Sp(M) = \{2\}}$

de plus : $\mathrm{rg}\,(M - 2I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ donc $\dim(E_2(M)) = 3 - 2 = 1$

M appartient à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(M)} \dim(E_\lambda(M)) = 1 \neq 3$ donc *(Condition nécessaire et suffisante)*

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

5) On note : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour cette matrice on peut faire plusieurs approches comme remarquer que $M^2 = I_4$ donc les valeurs propres sont dans $\{-1, 1\}$. Ensuite en étudie le rg$(M - I_4)$ et le le rg$(M + I_4)$ pour trouver le spectre et la diagonalisation

6) *(non corrigé)*

7) La matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire donc son spectre est $\{1, 2, 3\}$

La matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ a 3 valeurs propres distinctes donc *(Condition suffisante)*

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}}$$

8) La matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire donc son spectre est $\{2, 3\}$

de plus : $\mathrm{rg}\,(M - 2I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ donc $\dim(E_2(M)) = 3 - 1 = 2$

Remarque de Nokomie : on peut en déduire que $\dim(E_3(M)) = 1$ (En effet : $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(M)} \dim(E_\lambda(M)) \leqslant 3$)

M appartient à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(M)} \dim(E_\lambda(M)) = 3$ donc *(Condition nécessaire et suffisante)*

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}}$$

Ex 5 : 1) La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ on la note M

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)+4 = \lambda^2-5\lambda+6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

donc le spectre de f est $\{2,3\}$, *(f est diagonalisable)*

$M-2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est une base de $E_2(M)$

$M-3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $E_3(M)$

Par juxtaposition : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M.

ce qui entraîne que : $\mathscr{B}' = (e_1-2e_2, e_1-e_2)$ est une base de E formée de vecteurs propres de M.

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } (e_1-2e_2, e_1-e_2) \text{ est } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

2) La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on la note M

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{rg}(M-\lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}}_{triangulaire}$$

donc $\operatorname{Sp}(M) = \{1\}$ et $\dim(E_1)(M) = 1$ et ainsi *(Condition nécessaire et suffisante)*

M n'est pas diagonalisable

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

3) *Juste la fin du raisonnement*

Le spectre de M est $\{0,3\}$,

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_3(M)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_0(M)$

donc $\mathscr{B} = ((1,1,0),(1,-2,0),(0,0,1))$ est une base et la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

4) *(non corrigé)*

Ex 6 : 1) $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+2$ donc

- $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}}$, le spectre est vide et donc

$$\boxed{M_1 \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

- $\boxed{\text{sur } \mathbb{C}}$, M_1 de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ possède deux valeurs propres distinctes $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$ donc M_1 est diagonalisable,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{i\sqrt{2}}(M_1) \iff \begin{pmatrix} -1 & -i\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } E_{i\sqrt{2}}(M_1) = \text{Vect} < \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ i \end{pmatrix} >$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-i\sqrt{2}}(M_1) \iff \begin{pmatrix} -1 & i\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } E_{-i\sqrt{2}}(M_1) = \text{Vect} < \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix} >$$

En juxtaposant les bases on obtient une base formée de vecteurs propres

Plus précisément, en posant $\boxed{P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ i & -i \end{pmatrix}}$ on a P inversible et $\boxed{M_1 = P \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}}$

2)

$$\begin{aligned} \det(M_2 - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{\text{Sp}(M_2) = \{2\,,\,3\}}$$

$M_2 \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et a deux valeurs propres distinctes donc $\boxed{M_2 \text{ est diagonalisable}}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(M_2) \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } E_2(M_2) = \text{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} >$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_3(M_2) \iff \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } E_3(M_2) = \text{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} >$$

En juxtaposant les bases on obtient une base formée de vecteurs propres

Plus précisément, en posant $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$ on a P inversible et $\boxed{M_2 = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}}$

3)

$$\begin{aligned} \det(M_3 - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{\text{Sp}(M_3) = \{0\}}$$

de plus $\text{rg}(M_3) = 1$ donc $\dim(E_0(M_3)) = 1$

$$M_3 \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } \sum_{\lambda \in Sp(M_3)} \dim(E_\lambda(M_3)) \neq 2 \quad \text{donc} \quad \boxed{M_3 \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

4) M_4 est triangulaire donc $\text{Sp}(M_4) = \{2\}$

Si M_4 était diagonalisable alors on aurait M_4 semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ce qui impossible car seule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{En conclusion : } \boxed{M_4 \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

5) • si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\text{Sp}(M_5) = \{1\}$ et $\dim(E_1(M_5)) = 1$ donc $\boxed{M_5 \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

• si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\text{Sp}(M_5) = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}$

M_5 appartient à $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et possède 3 valeurs propres distinctes donc

$$\boxed{M_5 \text{ est diagonalisable}}$$

$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(M_5)$ $\left(\begin{pmatrix}e^{i\frac{2\pi}{3}}\\e^{i\frac{4\pi}{3}}\\1\end{pmatrix}\right)$ de $E_{e^{i\frac{2\pi}{3}}}(M_5)$ $\left(\begin{pmatrix}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\\e^{-i\frac{4\pi}{3}}\\1\end{pmatrix}\right)$ de $E_{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}(M_5)$

On note : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$,

En juxtaposant les bases on obtient une base formée de vecteurs propres

Plus précisément, en posant $\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & j & j^2\\1 & j^2 & j\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}}$ on a P inversible et $\boxed{M_5 = P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & j & 0\\0 & 0 & j^2\end{pmatrix}P^{-1}}$

6) Le spectre de M_6 est $\{1, 2\}$

$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_2(M_6)$ $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(M_6)$

$M_6 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\sum_{\lambda\in Sp(M_6)} \dim(E_\lambda(M_6)) = 3$ donc $\boxed{M_6 \text{ est diagonalisable}}$

En juxtaposant les bases on obtient une base formée de vecteurs propres

Plus précisément, en posant $\boxed{P = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}}$ on a P inversible et $\boxed{M_6 = P\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}}$

7) $\mathrm{Sp}(M_7) = \{-5\,,\,0\,,\,2\}$

$\left(\begin{pmatrix}4\\-35\\46\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-5}(M_7))$ $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ de $E_0(M_7))$ $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ de $E_2(M_7))$

M_7 appartient à $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et possède 3 valeurs propres distinctes donc

$$\boxed{M_7 \text{ est diagonalisable}}$$

En juxtaposant les bases on obtient une base formée de vecteurs propres

Plus précisément, en posant $\boxed{P = \begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\-35 & 0 & 0\\46 & -1 & 1\end{pmatrix}}$ on a P inversible et $\boxed{M_7 = P\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}P^{-1}}$

8) *(non corrigé)*

Ex 7 : Soit M une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *(En classe on a utilisé le rang mais on peut aussi faire ainsi :)*
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(M) &\iff M - \lambda I_n \text{ non inversible}\\ &\iff (M-\lambda I_n)^\top \text{ non inversible}\\ &\iff M^\top - \lambda I_n^\top \text{ non inversible}\\ &\iff M^\top - \lambda I_n \text{ non inversible}\\ &\iff \lambda \in \mathrm{Sp}(M^\top)\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(M^\top)}$

2) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ $\big(= \mathrm{Sp}(M^\top)\big)$,

$$\begin{aligned}\dim(E_\lambda(M)) &= n - \mathrm{rg}(M - \lambda I_n) && \textit{(théorème du rang)}\\ &= n - \mathrm{rg}((M-\lambda I_n)^\top)\\ &= n - \mathrm{rg}(M^\top - \lambda I_n)\\ &= \dim\big(E_\lambda(M^\top)\big)\end{aligned}$$

or on sait que M diagonalisable si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{\lambda\in Sp(M)} \dim(E_\lambda(M)) = n$

donc M diagonalisable si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{\lambda\in Sp(M^T)} \dim\big(E_\lambda(M^T)\big) = n$

et ainsi

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable si, et seulement si, } M^\top \text{ est diagonalisable}}$$

Une autre démonstration sans le théorème, qui montre qu'il suffit de montrer une implication. :

• *Montrons l'implication directe* :

On suppose que M est diagonalisable.

on note P une matrice inversible et Δ une matrice diagonale telles que $M = P\Delta P^{-1}$.

on a alors $M^\top = (P^{-1})^\top \Delta^\top P^\top$ et donc $M^\top = (P^\top)^{-1}\Delta P^\top$

en posant $Q = (P^\top)^{-1}$ on a une matrice inversible telle que $M^\top = Q\Delta Q^{-1}$,

donc $M^\top$ est diagonalisable.

• Comme $(M^\top)^\top = M$, en appliquant l'implication précédente à $M^\top$ on obtient la réciproque :

si $M^\top$ est diagonalisable alors M est diagonalisable

En conclusion :

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable si, et seulement si, } M^\top \text{ est diagonalisable}}$$

Ex 8 : 1) On suppose que $sp(M) = \{\lambda\}$ et M diagonalisable,

M est diagonalisable donc semblable à une matrice diagonale Δ, on note P telle que $M = P\Delta P^{-1}$

or deux matrices semblables ont même spectre donc

Δ est une matrice diagonale avec une seule valeur propre ce qui entraine $\Delta = \lambda I_n$

$$\begin{aligned}\text{Il vient}\quad M &= P\Delta P^{-1}\\ &= P(\lambda I_n)P^{-1}\\ &= \lambda\, PP^{-1}\\ &= \lambda I_n\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{si}\quad \mathrm{sp}(M) = \{\lambda\} \text{ et } M \text{ diagonalisable}\quad \text{alors}\quad M = \lambda I_n}$$

2) Si M a une unique valeur propre et si M n'est pas de la forme λM alors M n'est pas diagonalisable.

3) • $\mathrm{sp}(A_1) = \{0\}$ *(à justifier)* donc si A_1 était diagonalisable elle serait nulle,
mais A_1 n'est pas la matrice nulle donc $\boxed{A_1 \text{ n'est pas diagonalisable}}$

• $\mathrm{sp}(A_2) = \{1\}$ *(matrice triangulaire)* donc si A_2 était diagonalisable elle serait égale à l'identité,
mais A_2 n'est pas l'identité donc $\boxed{A_2 \text{ n'est pas diagonalisable}}$

• $\mathrm{sp}(A_3) = \{2\}$ *(à justifier)* donc si A_3 était diagonalisable elle serait égale à $2I_3$,
mais $A_3 \neq 2I_3$ donc $\boxed{A_3 \text{ n'est pas diagonalisable}}$

Ex 9 : 1) a. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha A + \beta B)_{i,i}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha(A)_{i,i} + \beta(B)_{i,i})\\ &= \alpha\sum_{i=1}^{n}(A)_{i,i} + \beta\sum_{i=1}^{n}(B)_{i,i}\\ &= \alpha\,\mathrm{tr}(A) + \beta\,\mathrm{tr}(B)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application trace est bien une forme linéaire.}}$$

b. Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k}(B)_{k,i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} (B)_{k,i}(A)_{i,k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} (B)_{k,i}(A)_{i,k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{k,k} \\
&= \operatorname{tr}(BA)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour toutes matrices } A \text{ et } B \text{ de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)}$$

c. On suppose que pour une matrice P inversible $A = P^{-1}BP$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A) &= \operatorname{tr}((P^{-1}B)P) \\
&= \operatorname{tr}(PP^{-1}B) \\
&= \operatorname{tr}(I_n B) \\
&= \operatorname{tr}(B)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Deux matrices semblables ont la même trace.}}$$

2) a. On suppose A est diagonalisable, elle semblable à une matrice diagonale Δ,

- A et Δ sont semblables :

  donc *(cours)* $\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(\Delta)$ et $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda(\Delta))$ ce qui entraine

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \lambda \dim(E_\lambda(A)) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(\Delta)} \lambda \dim(E_\lambda(\Delta))$$

- Δ est diagonale donc le rang de $\Delta - \lambda I_n$ est égal au nombre de coefficients non nuls sur sa diagonale,

  donc $\dim(E_\lambda(\Delta))$ est égal au nombre d'apparitions de λ sur la diagonale de Δ et ainsi :

$$\operatorname{tr}(\Delta) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(\Delta)} \lambda \dim(E_\lambda(\Delta))$$

- A et Δ sont semblables donc *(question 1)c)* $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(\Delta)$.

$$\boxed{\text{si } A \text{ est une matrice carrée diagonalisable alors : } \operatorname{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \lambda \dim(E_\lambda(A))}$$

Dans toutes les feuilles d'exercices lorsqu'on a montré que $M = P\Delta P^{-1}$ vérifier que M et Δ ont même trace.