Correction de la feuille_Cours_8_2 : Propriétés des intégrales convergentes.

Ex 1 : 1) • D'une part : $t \longmapsto \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ et $\displaystyle\int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln(t) - t\Big]_x^1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$

$$\text{donc } \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } -1.$$

• D'autre part : $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0,1[$ et $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = \Big[-2\sqrt{1-t}\Big]_0^x \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 2$

$$\text{donc } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{converge et vaut 2.}$$

En conclusion *(linéarité)* :

$$\boxed{\int_0^1 \left(\ln(t) + \frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } 1}$$

2) Soit $k \geqslant 1$, $\quad F : t \longmapsto -\dfrac{1}{kt^k}$ est une primitive de $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^{k+1}}$ sur $]0;+\infty[$,

f est continue sur $[1;+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$ $(\in \mathbb{R})$ donc pour tout $k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{k+1}}\,\mathrm{d}t$ converge.

On peut en déduire *(linéarité)* que :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t^{k+1}}\right)\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

Remarque : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t^{k+1}}\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{k+1}}\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Ex 2 : 1) On sait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente donc on peut appliquer la relation de Chasles.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{-\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{+\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0\end{aligned}$$

2) *(non corrigé.)*

Ex 3 : 1) $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\,e^{-t} \geqslant 0 \quad$ et $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0}$

2) $\forall t \in]0,1[, \quad (\ln(t))^3 \leqslant 0 \quad$ et $\quad \displaystyle\int_0^1 (\ln(t))^3\,\mathrm{d}t$ converge donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln^3(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0}$

3) je ne sais pas, la fonction change de signe en 1, je ne trouve pas d'argument simple pour trouver le signe

4) *(Non rédigé)* $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{3-2t+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0}$

Ex 4 : *(non corrigé)*
Ex 5 : *(non corrigé)*
Ex 6 : *(non corrigé)*
Ex 7 : *(non corrigé)*

Ex 8 : 1) • La fonction $f : t \longmapsto e^{-|t|}$ est continue sur $]-\infty;+\infty[$.

• La fonction f est paire il suffit donc d'étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

Pour $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-e^{-t}\Big]_0^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

En conclusion :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } 2}$$

2) La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\sqrt{|t|}}{t}$ est continue sur $[-1,1]$ sauf en zéro.

• La fonction f est impaire, il suffit donc d'étudier $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

Pour $x \in]0,1]$, $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \Big[2\sqrt{t}\Big]_0^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge .

(pas besoin de la valeur)

En conclusion :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{|t|}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } 0}$$

3) *Pour cette intégrale on va directement au bon argument, inutile de parler de la parité.*

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{t}{t^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, $F : t \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$ donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \text{ diverge}}$$

Pour la suite juste la réponse

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\,dt$ $(a>0)$ converge et vaut $\dfrac{2}{a}$

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0 *(Indication faire une IPP)*

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1-t)}\,dt$ *cette intégrale diverge mais elle n'a rien à faire là.*

7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2+1}\,dt$ converge et vaut 0.

8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge et vaut π

9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\,dt$ converge et vaut 0

10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|t|\,dt$ diverge

11) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{t}\,dt$ diverge

12) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge et vaut 0