Correction de la feuille_Cours_8_3 : Intégrales généralisées.

Ex 1 : 1) $f : t \longmapsto te^{-t^2}$ est continue sur $]-\infty;+\infty[$, *(l'intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$)*

Etudions $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |te^{-t^2}|\,\mathrm{d}t$

$|f| : t \longmapsto |t|e^{-t^2}$ est une fonction paire il suffit donc d'étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Pour $x \in]0;+\infty[$,

$$\int_0^x te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

d'où *(parité)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge

En conclusion :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente}}$$

Remarque : On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et comme f est impaire, il vient $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$

2) $f : t \longmapsto \dfrac{\sin(2t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$, *(l'intégrale est impropre en $+\infty$)*

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est ACV si, et seulement si, } \int_1^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ CV}$$

• Montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente :

Pour $x \in]1;+\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_0^x = 1 - \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

• On a pour tout $t \in [1;+\infty[$, $0 \leqslant |f(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge,

donc *(théorème de convergence par comparaison des intégrandes positifs ou nuls)*

$$\int_1^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

En conclusion :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente}}$$

3) *(Juste la conclusion)*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} (t^3-2t)e^{-|t|}\,\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente}}$$

Ex 2 : 1) Pour tous réels x, y, $x + y = \max(x,y) + \min(x,y)$ donc

$$\boxed{f = f^+ + f^-}$$

2) *(disjonction des cas)*

- Si $x \leqslant y$ alors

  d'une part $\max(x,y) = y$

  d'autre part $|x-y| = y-x$ donc $\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(y-x) = y$

  donc $\quad \max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}|x-y|$

- Si $x > y$ alors

  d'une part $\max(x,y) = x$

  d'autre part $|x-y| = x-y$ donc $\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) = x$

  donc $\quad \max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}|x-y|$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout réel } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}|x-y|}$$

3) Les questions 1) et 2) donnent la relation : $f^+ = \dfrac{f}{2} + \dfrac{|f|}{2}$

or $\quad f$ est continue sur $]a,b[\quad$ et $\quad x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R} \quad$ donc

$$\boxed{f^+ \text{ est continue sur }]a,b[}$$

De plus $f^- = f - f^+$ donc

$$\boxed{f^- \text{ est continue sur }]a,b[}$$

4) On a f^+ et f sont continues sur $]a,b[$, pour tout $t \in]a,b[, \quad 0 \leqslant f^+(t) \leqslant |f(t)|$

et $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente donc *(théorème de convergence)* :

$$\int_a^b f^+(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}$$

On remarque que $f^- = f^+ - |f|$, ce qui permet de déduire que : *(linéarité)*

$$\int_a^b f^-(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}$$

Et comme : $f = f^+ + f^-$ on peut finalement affirmer que : *(linéarité)*

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$$

Ex 3 : *(non corrigé)*
Ex 4 : *(non corrigé)*
Ex 5 : *(non corrigé)*

Ex 6 : La fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

Effectuons le changement de variable $y = \sqrt{2t}$ en remarquant que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sqrt{2}\, e^{-\frac{(\sqrt{2t})^2}{2}}\, \frac{1}{\sqrt{2t}}\,\mathrm{d}t$$

- la fonction $\varphi : t \longmapsto \sqrt{2t}$ est de classe C^1 et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, $\qquad \varphi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2t}}$

- $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{\sqrt{2t}}\,\mathrm{d}t$.

- $\lim\limits_{0} \varphi = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$

donc *(changement de variable)* on peut affirmer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{2}\; e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y \ \text{ sont de même nature et égales en cas de convergence.}$$

$$\text{or} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y, \qquad \text{converge et vaut } \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \qquad \textit{(Voir Ex 7).}$$

En conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \ \text{ converge} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}}$$

La suite n'est pas corrigée