Feuille_Exo_16 : Diagonalisation.

Ex 1 : Diagonaliser (si possible) les matrices suivantes :

(On répondra dans un premier temps pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ puis pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

$$M_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ex 2 : Diagonaliser (si possible) les matrices suivantes.

(On répondra dans un premier temps pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ puis pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 3 :

1) Diagonaliser (si possible) l'endomorphisme f de $\mathbb{C}^2$ définie par : $f((x,y)) = \frac{1}{2}(2x+3y, x)$
2) Peut-on diagonaliser l'endomorphisme f de $\mathbb{C}^3$ définie par : $f((x,y,z)) = (2x-5z, x-y, x)$
3) Diagonaliser *(si possible)* $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
4) Peut-on diagonaliser l'endomorphisme f de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?
5) Peut-on trouver $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $\Delta \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P\Delta P^{-1}$?
6) Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base quelconque de $\mathbb{C}^3$,

   on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ ayant pour matrice dans la base $\mathscr{B}$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   Diagonaliser *(si possible)* l'endomorphisme f.

Ex 4 : Diagonaliser (si possible) les endomorphismes suivants.

1) f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par : $f(P) = P(1)(X+1) + P'(2)(X^2-1)$
2) f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par : $f(P) = (X-1)P' + P$
3) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ définie par $f(M) = AM$
4) f l'endomorphisme de $\mathbb{C}_4[X]$ défini par : $f(P) = P(X+1) - P(X)$
5) On note $E = \text{Vect} < t \longmapsto e^t \ ; \ t \longmapsto te^t \ ; \ t \longmapsto t^2e^t >$

   Et φ l'endomorphisme de E défini par : $\varphi(f) = f'$
6) On note $E = \text{Vect} < t \longmapsto e^t \ ; \ t \longmapsto te^t \ ; \ t \longmapsto t^2e^t >$

   Et φ l'endomorphisme de E défini par : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(t) = tf'(t) - tf(t)$

Ex 5 : Les matrices de $\mathscr{M}_9(\mathbb{C})$ suivantes sont-elles diagonalisable ? *(Si oui essayez de diagonaliser.).*

$$X = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&1&0&0&0&0&0&1&1 \\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1 \\ 1&0&0&1&0&1&0&0&1 \\ 1&0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Ex 6 : Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, on admet que : $A(A+4I_4)^3 = 0$

Déterminer le spectre de A et montrer que A n'est pas diagonalisable.

Ex 7 : 1) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on considère une suite u vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$.

Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$

2) On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Prouver que la matrice A est diagonalisable.

b. Prouver qu'il existe trois matrices R_1, R_2 et R_3 de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que pour tout entier n, on ait :

$$A^n = R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3.$$ *On ne demande pas de calculer explicitement ces matrices.*

c. Soit u une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.
Prouver qu'il existe des constantes α, β et γ telles que : $u_n = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n$.
On ne demande pas de calculer explicitement les constantes α, β et γ.

3) On suppose dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Montrer que A est semblable à la matrice : $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. Déterminer B^n pour tout entier naturel n.

d. Soit u une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$.
Prouver qu'il existe des constantes α, β et γ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma n$
On ne demande pas d'expliciter les constantes α, β et γ.

Ex 8 : Soient x, y et z des fonctions d'une variable t définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions du système différentiel

$$\begin{cases} x' = 5x - 2y - 2z \\ y' = -4x + 3y + 2z \\ z' = 6x - 4y - 2z \end{cases}$$

1) On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ (dite matrice dérivée de X).
Déterminer une matrice A telle que $X' = AX$, puis une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle $A = PDP^{-1}$.

2) Soient a, b et c trois fonctions telles que $Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$ et $Y(t) = P^{-1}X(t)$.

Montrer que les fonctions a, b et c sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et sont solutions d'équations différentielles que vous déterminerez.

3) Déterminer l'ensemble des solutions $t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$ de ce système différentielle.

4) Déterminer la solution vérifiant $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 1)$.

Ex 9 : *Agro 2013* Considérons la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$: $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2i & 1+i \\ -1-i & -i & -1-i \\ -2i & -2i & -i \end{pmatrix}$

1) Déterminer les valeurs propres de A.
Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, il est conseillé de commencer par l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$ sur la matrice $A - \lambda I_3$, puis de distinguer deux cas selon que $\lambda = -i$ ou $\lambda \neq -i$.

2) Pour chaque valeur de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.

3) Donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telles que : $A = PDP^{-1}$.

4) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_3$.