Colles de mathématiques - Semaine 15 - du 26/01/26

La colle commencera par une question de cours, les démonstrations peuvent être données en exercice.

- **Eléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée. Diagonalisation.**

Définition d'une valeur propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Définition du spectre.
Différentes caractérisations des valeurs propres.
Définition d'un vecteur propre d'un endomorphisme, d'une matrice.
Définition du sous-espace propre (noté $E_\lambda(f)$ ou $E_\lambda(M)$).
Spectre d'une matrice triangulaire.

En dimension finie,

lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux d'une matrice qui le représente dans une base.

En dimension quelconque :

Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

En dimension n :

Un endomorphisme a au plus n valeurs propres distinctes, *même proposition pour une matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure à n.

Définition d'un endomorphisme diagonalisable. Définition d'une matrice carrée diagonalisable.

(Condition suffisante)
Un endomorphisme d'un espace de dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

(et alors les sous-espaces propres sont tous de dimension 1*)*

(Condition nécessaire et suffisante)
Un endomorphisme d'un espace de dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions de leurs sous-espaces propres est égale à n.

"Diagonaliser un endomorphisme f" signifie déterminer une base de E pour laquelle $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale.

"Diagonaliser une matrice carrée M" signifie déterminer deux matrices : $\begin{cases} P \text{ inversible} \\ \Delta \text{ diagonale} \end{cases}$, telles que $M = P\Delta P^{-1}$.

Calcul de puissances de matrice. Système différentiel.

- **Intégrales généralisées.**

Convergence d'une intégrale impropre pour une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert.
Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité en un point.
Cas d'une fonction continue sur un intervalle sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Propriétés. Linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance, stricte positivité.
Cas des fonctions paires et des fonctions impaires.
Théorème de convergence par comparaison pour deux fonctions positives ou nulles f et g telles que $f \leqslant g$.
Théorème de convergence pour deux fonctions positives ou nulles f et g telles que $f \sim g$.
Définition d'une intégrale absolue convergente. Théorème : $\int f$ ACV $\Rightarrow \int f$ CV.
Intégrales généralisées usuelles : ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $a < b$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\ \mathrm{d}t = b - a \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ \mathrm{d}t = \sigma\sqrt{2\pi}$$

Adaptation de la formule d'intégration par parties aux intégrales généralisées.

On souligne la nécessité de confirmer la convergence de tous les termes apparaissant dans une telle formule.

Théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.

– –