Interrogation 8 (25 minutes) **(Sujet B)**

La calculatrice n'est pas autorisée. *Le brouillon est autorisé.*

Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous voulez. Les questions les plus difficiles sont indiquées par (∗)

On pourra admettre le résultat démontré à la question 4)

On suivra les consignes habituelles : Conclure et encadrer les conclusions, numéroter les pages, précision des conditions d'application des théorèmes., ...

Définitions :

- On dit qu'une suite de matrices (M_n) de $\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $M \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ si, pour chaque couple (i,j), la suite réelle $\big((M_n)_{i,j}\big)$ converge vers $(M)_{i,j}$.
  La matrice M est alors appelée la limite de la suite (M_n).
- Pour $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A le scalaire : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

– –

1) On note A la matrice $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
   a) Déterminer le spectre de A.
   b) Justifier que A diagonalisable.
   c) Diagonaliser A.
   d) (∗) Montrer que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

2) Qu'entend-on par "diagonaliser un endomorphisme" ?

3) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui à $P(X)$ associe $XP'(X) - P(1)$.
   a) Déterminer la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   b) Déterminer le spectre de M.
   c) Montrer que M est diagonalisable.
   d) Diagonaliser f.

4) Diagonaliser, si possible, la matrice $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   a) Montrer que -1 et 2 sont des valeurs propres de N.
   b) N possède-t-elle une troisième valeur propre ? *(On pourra s'aider de la trace)*
   c) La matrice N est-elle diagonalisable ?

5) (∗) Démontrer que deux matrices semblables ont même trace.