

Interrogation 8 (25 minutes) (Sujet A)

La calculatrice n'est pas autorisée. Le brouillon est autorisé.

Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous voulez. Les questions les plus difficiles sont indiquées par ()*

On pourra admettre le résultat démontré à la question 5) sur la trace d'une matrice carrée.

On suivra les consignes habituelles : Conclure et encadrer les conclusions, numéroter les pages, précision des conditions d'application des théorèmes., ...

Définitions :

- On dit qu'une suite de matrices (M_n) de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ si, pour chaque couple (i, j) , la suite réelle $((M_n)_{i,j})$ converge vers $(M)_{i,j}$.

La matrice M est alors appelée la limite de la suite (M_n) .

- Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A le scalaire : $\sum_{i=1}^n a_{i,i}$

1) On note A la matrice $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le spectre de A .
- Justifier que A diagonalisable.
- Diagonaliser A .
- (*) Montrer que $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

2) Qu'entend-on par "diagonaliser un endomorphisme" ?

3) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui à $P(X)$ associe $P(X) - P(1)$.

- Déterminer la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Déterminer le spectre de M .
- Montrer que M est diagonalisable.
- Diagonaliser f .

4) Diagonaliser, si possible, la matrice $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Montrer que -1 et 2 sont des valeurs propres de N .
- Montrer, en utilisant la trace, que N n'a pas d'autres valeurs propres.
- La matrice N est-elle diagonalisable ?

5) (*) Démontrer que deux matrices semblables ont même trace.