

Interrogation n°8 sujet A

$$\begin{aligned} 1) \text{ a) } \det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\frac{3}{2} - \lambda)(-1 - \lambda) + 1 \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda + \lambda^2 + 1 \\ &= \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\text{donc } Sp(A) = \{-\frac{1}{2}, 1\}$$

b) $A \in M_2(\mathbb{R})$ et A a deux valeurs propres distinctes.
donc

A est diagonalisable

$$\begin{aligned} \text{c) } \bullet (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } E_1(A) = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \bullet (A + \frac{1}{2}I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } E_{-\frac{1}{2}}(A) = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

En juxtaposant les bases on obtient une base formée de vecteurs propres de A .

En posant : $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ on a P inversible et

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

d) On montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} P^{-1}$

$$\text{donc } A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{a) } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc } P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(A^n) \text{ converge vers } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Diagonaliser un endomorphisme de E , c'est déterminer une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

$$3) \text{ a) } f(1) = 1 - 1 = 0, \quad f(x) = x - 1 \quad \text{et} \quad f(x^2) = x^2 - 1$$

$$\text{donc } \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } B \text{ est la base canonique.}$$

$$\text{b) } M \text{ est triangulaire donc } Sp(M) = \{0, 1\}$$

$$\text{c) } \text{rg}(M) = 2 \quad \text{donc } \dim(E_0(M)) = 1$$

$$\text{rg}(M - I) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{donc } \dim(E_1(M)) = 2$$

$$M \in M_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda \in Sp(M)} \dim E_\lambda(M) = 3 \quad \text{donc } M \text{ est diagonalisable}$$

d) • $f(1) = 0$ et $\dim(E_0(f)) = 1$ donc
 $E_0(f) = \text{Vect}(1)$

• $f(x-1) = x-1$ $((x-1), (x-1)^2)$ libre
 $f((x-1)^2) = (x-1)^2$ car de degrés différents

et $\dim(E_2(f)) = 2$

donc $((x-1), (x-1)^2)$ base de $E_1(f)$.

Par juxtaposition des bases on obtient une base de $\mathbb{P}_2[x]$ formée de vecteurs propres de f .

$B' = (1, (x-1), (x-1)^2)$ est une base de $\mathbb{P}_2[x]$

et $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) • $N + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

donc $\text{rg}(N + I_3) = 2$ et ainsi $\begin{cases} -1 \in Sp(N) \\ \dim(E_{-1}(N)) = 1 \end{cases}$

• $N - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

donc $\text{rg}(N - 2I_3) = 2$ et ainsi $\begin{cases} 2 \in Sp(N) \\ \dim(E_2(N)) = 1 \end{cases}$

-1 et 2 sont des valeurs propres de N

b) Si N possédait une valeur propre $\lambda_3 \notin \{-1, 2\}$.

alors N serait semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d'après 5) $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

on aurait $\text{tr}(N) = \lambda_3 + 1$ et comme $\text{tr}(N) = 3$,
on aurait $\lambda_3 = 2$, ce qui est impossible.

donc N ne possède pas d'autre valeur propre.

$Sp(N) = \{-1, 2\}$

c) Les calculs précédents montrent que $\sum_{\lambda \in Sp(N)} \dim(E_\lambda(N)) = 2$

or $N \in M_3(\mathbb{R})$ donc

N n'est pas diagonalisable.

5). On montre que pour deux matrices carrées A et B on a:
 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

• Si maintenant on prend A et B deux matrices
semblables,

$A = PBP^{-1}$ avec P une matrice inversible

$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \text{tr}(PBP^{-1}) \\ &= \text{tr}(P^{-1}(PB)) \\ &= \text{tr}((P^{-1}P)B) \\ &= \text{tr}(I_3 B) = \text{tr}(B) \end{aligned}$

Si A et B sont semblables alors $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$