

Interrogation n°8 sujet B

$$\begin{aligned} 1) \quad \det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{3} - \lambda\right) - \frac{4}{9} \\ &= -\frac{2}{9} - \frac{1}{3}\lambda + \lambda^2 - \frac{4}{9} \\ &= \lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}(\lambda - 1)(3\lambda + 2) \end{aligned}$$

donc $\text{Sp}(A) = \left\{1, -\frac{2}{3}\right\}$

b) $A \in M_2(\mathbb{R})$ et A a deux valeurs propres distinctes.
donc

A est diagonalisable

$$\begin{aligned} c) \quad (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } E_1(A) = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ (A + \frac{2}{3}I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } E_{-\frac{2}{3}}(A) = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

En juxtaposant les bases on obtient une base formée de vecteurs propres de A .

En posant : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ on a P inversible et

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} P^{-1}$$

d) On montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}$

donc $A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \left(-\frac{2}{3}\right)^n P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

$$\text{a) } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{donc } P^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(A^n) converge vers $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

2) Diagonaliser un endomorphisme de E , c'est déterminer une base de E formée de vecteurs propres de f .

$$3) \text{ a) } f(1) = -1, \quad f(x) = x - 1 \quad \text{et} \quad f(x^2) = 2x^2 - 1$$

donc $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ où B est la base canonique.

b) M est triangulaire donc $\text{Sp}(M) = \{-1, 1, 2\}$

c) $M \in M_3(\mathbb{R})$ et possède 3 valeurs propres distinctes.

donc M est diagonalisable

$$d) \quad (M + I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (M - I) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M - 2I = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $E_1(M) = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $E_1(M) = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $E_2(M) = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

donc

$$E_{-1}(f) = \text{Vect} \langle 1 \rangle$$

$$E_1(f) = \text{Vect} \langle 1 - 2x \rangle$$

$$E_2(f) = \text{Vect} \langle 1 - 3x^2 \rangle$$

Par juxtaposition des bases on obtient une base de $\mathbb{R}_2[x]$ formée de vecteurs propres de f .

$$B' = (1, 1-2x, 1-3x^2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[x]$$

$$\text{et } \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4) \bullet M + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\text{rg}(M + I_3) = 2$ et ainsi $\begin{cases} -1 \in \text{Sp}(M) \\ \dim E_{-1}(M) = 1 \end{cases}$

$$\bullet M - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

donc $\text{rg}(M - 2I_3) = 2$ et ainsi $\begin{cases} 2 \in \text{Sp}(M) \\ \dim E_2(M) = 1 \end{cases}$

$$\boxed{-1 \text{ et } 2 \text{ sont des valeurs propres de } M}$$

b) si M possède une autre valeur propre λ , alors $\lambda + (-1) + 2 = \text{tr } M = 4$

donc $\lambda = 3$.

on vérifie : $M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\text{rg}(M - 3I_3) = 2$ donc $3 \in \text{Sp}(M)$

$M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ne peut avoir plus de trois valeurs propres distinctes

$$\boxed{\text{Sp}(M) = \{-1, 2, 3\}}$$

c) M possède 3 valeurs propres distinctes et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable.}}$$

5). On montre que pour deux matrices carrées A et B on a : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Si maintenant on prend A et B deux matrices semblables,

$$A = P B P^{-1} \text{ avec } P \text{ une matrice inversible.}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \text{tr}(P B P^{-1}) \\ &= \text{tr}(P^{-1}(P B)) \\ &= \text{tr}((P^{-1}P)B) \\ &= \text{tr}(I_3 B) = \text{tr}(B) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont semblables alors } \text{tr}(A) = \text{tr}(B)}$$